Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik D im Sommersemester 2006

Klausur

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Donnerstag, 27.07.2006, 16:15 Uhr, Gerthsen-Hörsaal

Bearbeitungszeit: $2\frac{1}{2}$ Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
Korrektor				
Punkte				

Gesamtpunktzahl	(von 20)

Aufgabe K1: *Zerlegungen der Wellenfunktion* 5 Punkte

Die komplexe Wellenfunktion $\psi(x,t)$ kann zerlegt werden als $\psi(x,t) = u(x,t) + \mathrm{i}\, v(x,t)$ oder als $\psi(x,t) = A(x,t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, S(x,t)}$. Dabei sind u, v, A und S reelle Funktionen von x und t.

a) Welche Gleichungen folgen aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung mit dem Hamiltonoperator $H = -\hbar^2/(2m)\partial_x^2 + V(x)$ für diese Funktionen?
Geben Sie jeweils eine Gleichung an, in der die Zeitableitung nur einer der Funktionen u, v, A, S vorkommt.

(2 Punkte)

b) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte durch diese Funktionen aus.

(3 Punkte)

Aufgabe K2: *Gebundene Zustände im Delta-Potential* 5 Punkte

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension im Potential

$$V(x) = -\gamma\delta(x)$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$ bewegt.

a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0+} \psi'(x) - \lim_{x\to 0-} \psi'(x) = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2}\,\psi(0)\,.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung über ein ϵ-Intervall und lassen Sie ϵ gegen 0 gehen. Nehmen Sie an, daß die Wellenfunktion stetig ist.

(2 Punkte)

b) Finden Sie sämtliche gebundenen Zustände und die zugehörigen Energieeigenwerte. Normieren Sie die Wellenfunktionen.

(3 Punkte)

Aufgabe K3: *Harmonischer Oszillator*

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

5 Punkte

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\,.$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren sind definiert als

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p\,, \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p\,,$$

wobei p der Impulsoperator ist.

a) $n \geq 0$ sei fest gewählt. Konstruieren Sie eine normierte reelle Linearkombination ϕ aus den beiden Zuständen ψ_n und ψ_{n+1} derart, daß $\langle x \rangle$ maximal wird.
Hierbei ist ψ_k ein normierter Eigenzustand zum Anzahloperator N mit Eigenwert k.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustandes ϕ sowie den Ortserwartungswert $\langle x \rangle(t)$.

(2 Punkte)

Aufgabe K4: *Drehimpuls* 5 Punkte

Ein Teilchen (ohne Spin) befinde sich ein einem Zustand mit der normierten Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}) = \psi_1(\vec{x}) + \psi_0(\vec{x}) = \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\theta + \frac{g(r)}{\sqrt{4\pi}}\,\cos\theta\,,$$

wobei für die Radialfunktion gilt:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2\, |g(r)|^2 = 1\,.$$

Hierbei sind r, θ, ϕ Kugelkoordinaten im dreidimensionalen Raum.

a) Welche Werte kann man für die Meßgröße L_z in diesem Zustand erhalten?
(1 Punkt)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, diese jeweiligen Werte zu finden?
(2 Punkte)

c) Wie groß ist der Erwartungswert von L_z?
(2 Punkte)

Hinweis: L_z kann als Differentialoperator geschrieben werden, $L_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$.
Für die Normierung von ψ_0 und ψ_1 können Sie die folgenden Integrale verwenden:

$$\int \mathrm{d}x\,\sin^n x = -\frac{\sin^{n-1}x\,\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{d}x\,\sin^{n-2}x \qquad (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$$

$$\int \mathrm{d}x\,\sin x\,\cos^n x = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Lösung zu Aufgabe K1

a)

$$\begin{aligned}\hbar\dot{u} &= -\frac{\hbar^2}{2m}v'' + Vv \\ -\hbar\dot{v} &= -\frac{\hbar^2}{2m}u'' + Vu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \left(\dot{A} + \mathrm{i}A\dot{S}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ \psi' &= \left(A' + \mathrm{i}AS'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ \psi'' &= \left(A'' + 2\mathrm{i}A'S' + \mathrm{i}AS'' - AS'^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ -\hbar\dot{S} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{A''}{A} - S'^2\right) + V \\ \hbar\dot{A} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(2A'S' + AS''\right)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}|\psi|^2 &= u^2 + v^2 = A^2 \\ j &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right) \\ &= \frac{\hbar}{m}A^2S' \\ &= \frac{\hbar}{m}\left(uv' - vu'\right)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe K2

a) Integriere über das Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \gamma\delta(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\big(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\big) - \gamma\psi(0) &= E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\big(\psi'(0+) - \psi'(0-)\big) - \gamma\psi(0) &= 0
\end{aligned}
$$

b) Bereich $x < 0$: $\psi(x) = A\mathrm{e}^{\kappa x}$. Bereich $x > 0$: $\psi(x) = B\mathrm{e}^{-\kappa x}$ mit $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$. E ist negativ. Wegen Stetigkeit ist $A = B$. Sprungbedingung für die Ableitungen:

$$
-\kappa - \kappa = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2}
$$

Also:

$$
\kappa = \frac{m\gamma}{\hbar^2}\,.
$$

Es gibt nur einen gebundenen Zustand. Die Energie ist

$$
E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{m\gamma^2}{2\hbar^2}
$$

$$
\psi(x) = A\exp\big(-m\gamma/\hbar^2|x|\big)
$$

Normieren:

$$
\int \mathrm{d}x|\psi|^2 = 2|A|^2\int_0^\infty \exp\big(-2m\gamma/\hbar^2 x\big) = \frac{|A|^2\hbar^2}{m\gamma}
$$

Somit muß

$$
A = \sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}}
$$

gewählt werden.

Lösung zu Aufgabe K3

a) $\phi = \alpha\psi_n + \beta\psi_{n+1}$. Normierung: $\beta = \sqrt{1-\alpha^2}$. Wir berechnen den Ortserwartungswert mit Hilfe von

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right) .$$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\alpha^*\beta + \beta^*\alpha\right]\sqrt{n+1} \\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{n+1}\,.\end{aligned}$$

Wir müssen also die Funktion $f(\alpha) = \alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ maximieren.

$$f'(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2} + \frac{\alpha\,(-2)\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1-\alpha^2-\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

Somit muß $1-2\alpha^2 = 0$ gelten und damit $\alpha = 1/\sqrt{2} = \beta$. Der Ortserwartungswert ist dann

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n+1}\ .$$

b) Zeitentwicklung: $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}\psi_n + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{n+1}t/\hbar}\psi_{n+1}\right]$$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle(t) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_n t/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{n+1}t/\hbar} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{n+1}t/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}\right]\sqrt{n+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe K4

ψ lässt sich schreiben als $\psi = \psi_1 + \psi_0$ mit

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sin\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \, g$$
$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos\theta \, g$$

ψ_1 und ψ_0 sind Eigenzustände zu L_z: $L_z\psi_1 = \hbar\psi_1$, $L_z\psi_0 = 0$.

a) Die möglichen Meßwerte sind $\hbar$ und 0.

b) Zunächst normieren wir die Zustände ψ_1 und ψ_0:

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}r\, r^2|g(r)|^2 \int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\, \sin\theta\, \sin^2\theta = \frac{2\pi}{4\pi}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}r\, r^2|g(r)|^2 \int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\, \sin\theta\, \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

Definiere die normierten Zustände $\phi_1 = \sqrt{3/2}\psi_1$, $\phi_0 = \sqrt{3}\psi_0$. Damit ist

$$\psi = \sqrt{2/3}\,\phi_1 + \sqrt{1/3}\,\phi_0\,.$$

[Da ϕ_1 und ϕ_2 Eigenzustände von L_z zu *verschiedenen* Eigenwerten sind, müssen Sie orthogonal sein. Daher ist $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, wie auch schon in der Aufgabe angegeben.]

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Messwerte kann man direkt ablesen.

Meßwert	Wahrscheinlichkeit
$\hbar$	2/3
0	1/3

c) Der L_z-Erwartungswert ist:

$$\langle L_z\rangle = \frac{2}{3}\cdot\hbar + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{2}{3}\,\hbar$$