Aufgabe 1.

(a) $$\Psi(x) = N\, e^{-\alpha|x|/2}$$

$$1 = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha|x|} = 2N^2 \int_0^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} = \frac{2N^2}{\alpha} \Rightarrow N = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

(b) $$\langle x \rangle = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x\, e^{-\alpha|x|} = 0.$$

(ungerader Integrand)

$$\langle x^2 \rangle = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^2 e^{-\alpha|x|} =$$

$$= N^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha|x|} = N^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{2}{\alpha} =$$

$$= -2N^2 \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{4N^2}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}.$$

(c) $$\Psi(p) = N \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\, e^{-\alpha|x|/2} =$$

$$= N \left[\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{\left(\frac{\alpha}{2} - i\frac{p}{\hbar}\right)x} + \int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{ip}{\hbar}\right)x} \right] =$$

$$= N\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{2} - i\frac{p}{\hbar}} + \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + i\frac{p}{\hbar}}\right) = N\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{p^2}{\hbar^2}} \Rightarrow \quad 2$$

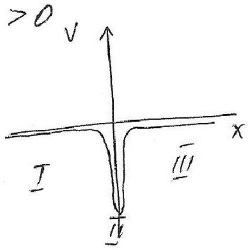
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\pi 4}}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar}\, p\, |\Psi(p)|^2 = 0$$

(ungerader Integrand)

Aufgabe 2.

(a) $V(x) = -V_0\, \delta(x)$, mit $E, V_0 > 0$



Schrödinger Gl.:

$$H\psi = E\psi \Rightarrow$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0\,\delta(x)\right]\psi = E\psi \Rightarrow$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0\,\delta(x)\right]\psi = E\psi \quad, \text{ für } x = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\psi = E\psi \quad, \quad \text{sonst.}$$

1). Wir betrachten zunächst den Bereich $x \neq 0$.

$\underline{x < 0}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi$$

Die Lösung ist

$$\psi(x) = A_1\, e^{i\lambda x} + A_2\, e^{-i\lambda x},$$

wobei $\lambda = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$ ist.

A_1 ist die Amplitude des einlaufenden Teilchens und kann wegen der Normierungsbedingung gleich 1 gesetzt werden. A_2 ist die Amplitude des reflektierten Teilchens. $\Rightarrow$

$$\psi_I(x) = e^{i\lambda x} + A_2\, e^{-i\lambda x}$$

Im Bereich $x>0$ existieren nur transmittierte Teilchen $\Rightarrow$

$$\psi_{III}(x) = A_3\, e^{i\lambda x}$$

Per Definition

$$R = \left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2 \quad \text{und} \quad T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$$

Randbedingungen:

$$\psi(0+) = \psi(0-). \qquad (1)$$

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0) \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow A_3 = \overset{A_1}{1} + A_2$$

$$i\lambda A_3 - i\lambda^{A_1} + i\lambda A_2 = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A_3$$

$$\left(i\lambda + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) A_3 - i\lambda^{A_1} + i\lambda\cdot\left(A_3 - 1^{A_1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{i\lambda - 2i\lambda} +$$

$$\left(2i\lambda + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) A_3 - 2i\lambda^{A_1} = 0$$

$$A_3 = \frac{+2i\lambda A_1}{2i\lambda + \frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$T = |A_3|^2 = \frac{2i\lambda}{2i\lambda + \frac{2mV_0}{\hbar^2}} \cdot \frac{-2i\lambda}{-2i\lambda + \frac{2mV_0}{\hbar^2}} =$$

$$= \frac{4\lambda^2}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + 4\lambda^2} = \frac{4 \cdot \frac{2mE}{\hbar^2}}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2mE}{\hbar^2}} =$$

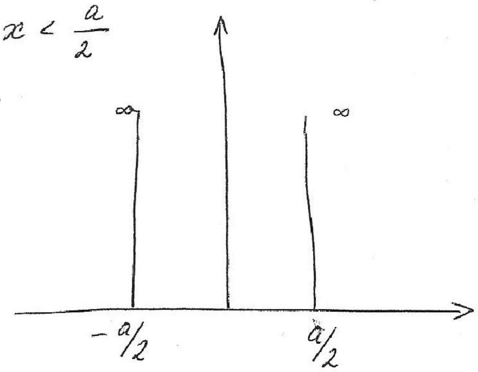
$$= \frac{1}{1 + \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^2 \cdot \hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{4 \cdot 2mE}} = \frac{1}{1 + \frac{m^2V_0^2}{2E \cdot \hbar^2}}$$

$$R = 1 - T \quad ; \quad T = \frac{1}{1 + \frac{m^2V_0^2}{2E \cdot \hbar^2}}$$

$$R = \frac{\frac{m^2V_0^2}{2E\hbar^2}}{1 + \frac{m^2V_0^2}{2E\hbar^2}}$$

Aufgabe 2

(b). $V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ +\infty, & \text{sonst}. \end{cases}$



für $|x| > \frac{a}{2}$ soll die Lösung gleich null sein.

~~Im~~ $\not{\psi}$

für $|x| < \frac{a}{2}$ $\Rightarrow$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi \,.$$

Lösung: $\psi(x) = \alpha \sin(\lambda x) + \beta \cos(\lambda x) = \cancel{\alpha \sin(\lambda x + \beta)}$

$\lambda = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ $\qquad = \alpha \cos(\lambda x + \beta)$

$\psi(-\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow \cancel{\alpha \cdot \sin(\beta)}$

$\cancel{\alpha \cdot \sin\left(-\frac{\lambda a}{2} + \beta\right)}$

Besser: $V(x) = V(-x)$; $\psi^{even}(\pm\frac{a}{2}) = 0$; $\psi^{odd}(\pm\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow$

$\cancel{\alpha \cos\left(\lambda \cdot \frac{a}{2} + \beta\right) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{a\lambda}{2}}$ $\qquad a k = n\frac{\pi}{2}$

$$\not{\psi} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right), & \text{for } n\text{-odd} \\ B \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right), & \text{for } n\text{-even} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2} \quad ; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$n = 1, 2, 3$

Aufgabe 3.

(a)

(i) : $\hat{O} = \frac{\hbar^2}{i} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Wir betrachten:

$$\langle \psi | O | \varphi \rangle = \frac{\hbar^2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \psi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Wir machen partielle Integration:

$$\langle \psi | O | \varphi \rangle = \underbrace{\frac{\hbar^2}{i} \left(\psi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \frac{\hbar^2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ominus$$

noch ein Mal $\Rightarrow$

$$\ominus - \frac{\hbar^2}{i} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \cdot \varphi \right)_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar^2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \Rightarrow$$

Dieser Operator ist nicht Hermite'sch.

(ii) $P_n = |u_n \times u_n|$

$P_n^+ = |u_n\rangle\langle u_n| = P_n \Rightarrow P_n$ ist Hermite'sch.

(iii)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

ja, diese Matrix ist Hermite'sch.

Aufgabe 3

(b)

(i) $(ABA)^+ = A^+B^+A^+ = ABA \Rightarrow$

ABA ist Hermite'sch.

(ii)

$(e^{iA})^+ = e^{-iA^+} = e^{-iA}$ – nicht Hermite'sch.

(iii) $(e^{i[A,B]})^+ = e^{-i[A,B]^+} = e^{-i\cdot(B^+A^+ - A^+B^+)} = e^{-i[B,A]} = e^{i[A,B]} \Rightarrow$

ja, es ist Hermite'sch.

Aufgabe 4.

a). $$([A,B])^+ = (AB - BA)^+ = B^+A^+ - A^+B^+ = BA - AB =$$
$$= [B,A] \Rightarrow$$

$$[A,B] \neq ([A,B])^+ \Rightarrow$$

$[A,B]$ ist nicht Hermite'sch.

b) $\langle [A,B] \rangle = ?$

$$\langle \varphi | [A,B] | \varphi \rangle^* = \langle \varphi | [A,B]^+ | \varphi \rangle = - \langle \varphi | [A,B] | \varphi \rangle$$

Aufgabe 5.

(a) $\langle \psi_n | [x, H] | \psi_{n'} \rangle = \langle \psi_n | (xH - Hx) | \psi_{n'} \rangle =$

$$= (E_{n'} - E_n) \langle \psi_n | x | \psi_n \rangle$$

Auch: $[x, p^2] = 2p\,[x,p] = 2i\hbar p$,

so dass

$$\langle \psi_n | [x, H] | \psi_{n'} \rangle = \frac{1}{2m} \langle \psi_n | [x, p^2] | \psi_{n'} \rangle =$$

$$= i\frac{\hbar}{m} \langle \psi_n | p | \psi_{n'} \rangle$$

Also,

$$\langle \psi_n | p | \psi_{n'} \rangle = i\frac{m}{\hbar} (E_n - E_{n'}) \langle \psi_n | x | \psi_{n'} \rangle$$

(b) $\langle \psi_n | p^2 | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | p \underbrace{\sum_{n'} | \psi_{n'} \rangle \langle \psi_{n'} |}_{=1} p | \psi_n \rangle =$

$$= \sum_{n'} \langle \psi_n | p | \psi_{n'} \rangle \langle \psi_{n'} | p | \psi_n \rangle =$$

$$= \sum_{n'} | \langle \psi_n | p | \psi_{n'} \rangle |^2 =$$

$$= \sum_{n'} \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 (E_n - E_{n'})^2 | \langle \psi_n | x | \psi_{n'} \rangle |^2$$

Aufgabe 6

(a) $$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} \; ; \quad |\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle$$

$\Rightarrow$ man misst die Eigenwerte $\mathcal{H}_{11} = -\frac{1}{2}\hbar\omega$ and $\mathcal{H}_{22} = \frac{1}{2}\hbar\omega$ mit den Wahrscheinlichkeiten $1/2$ und $1/2$ $\Rightarrow$ der Mittelwert der gemessenen Energie gleich null ist.

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} |u_i\rangle\langle u_i| H |u_j\rangle\langle u_j| = \sum_{ij} |u_i\rangle H_{ij} \langle u_j| ,$$

$$\mathcal{H}_{11} = -\frac{1}{2}\hbar\omega ; \quad \mathcal{H}_{22} = \frac{1}{2}\hbar\omega , \quad \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} = 0$$

Die Erwartungswert ist gegeben durch

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle \psi(0)| H |\psi(0)\rangle = \sum_{ij} \langle \psi(0)|u_i\rangle \mathcal{H}_{ij} \langle u_j|\psi(0)\rangle ,$$

$$\langle \psi(0)|u_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{1i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{2i}$$

$$\langle u_j|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{j1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{j2} \quad \Rightarrow$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} H_{11} + \frac{1}{2} H_{22} = 0.$$

Die Standartabweichung lautet:

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} ,$$

$$\langle H\rangle^2 = 0 ,$$

$$\langle H^2\rangle = \sum_{ijk} \langle \psi(0)|u_i\rangle H_{ij} H_{jk} \langle u_k|\psi(0)\rangle = \sum_{ijk} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{1i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{2i}\right) \times$$

$$\times H_{ij} H_{jk} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{k1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{2k}\right) = \frac{1}{2} H_{11}^2 + \frac{1}{2} H_{22}^2 = \frac{1}{4}\hbar^2\omega^2 \Rightarrow \boxed{\Delta H = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

(c) Zustandsvektor zur Zeit t:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |\psi(0)\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} |u_2\rangle$$

(d) $\langle S_x\rangle(t) = \langle \psi(t)| S_x |\psi(t)\rangle \Rightarrow$

$$\langle S_x\rangle(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}}\right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} \\ e^{-\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos(\cancel{2}\omega t)$$

$$\langle S_y\rangle(t) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} \left(e^{-i\omega t} \quad e^{i\omega t}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \sin(2\omega$$

$\Rightarrow$ $\langle S_x\rangle$ und $\langle S_y\rangle$ oszillieren.

(e)

(i) Man misst S_x zur Zeit t.

Wir berechnen $|\psi(t)\rangle$ in der "e"-Basis:

$$|\psi(t)\rangle = \langle e_1|\psi(t)\rangle |e_1\rangle + \langle e_2|\psi(t)\rangle |e_2\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u_2\rangle\right)|e_1\rangle +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_1| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}}|u_2\rangle\right)|e_2\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{\frac{i\omega t}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega t}{2}}\right)|e_1\rangle + \left(\frac{1}{2} e^{\frac{i\omega t}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega t}{2}}\right)|e_2\rangle =$$

$$= \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)|e_1\rangle + i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)|e_2\rangle. \Rightarrow$$

Man misst $\frac{\hbar}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$

und $-\frac{\hbar}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit $\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$.

~~(ii) Man misst S_y zur Zeit t.~~

~~Zunächst – Eigenwerte von S_y suchen:~~

$$\cancel{S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} -\lambda & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\hbar}{2}\ ;\ \lambda_2 = \frac{\hbar}{2}.}$$