2. Klausur zur Vorlesung Theorie D SS 2007

Name:

Matrikelnummer:

Vorname:

Tutor/Gruppe:

Wichtige Hinweise

- ☐ Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.
- ☐ Bitte dieses Deckblatt mit abgeben,
- ☐ für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden,
- ☐ und Ihren Namen auf jedes Blatt schreiben.

- ☐ Erlaubte Hilfsmittel: 1 handbeschriebenes A4-Blatt.

- ☐ Die volle Punktzahl dieser Klausur (Basis für die Vergabe des Scheins) ist bei 20 Punkten erreicht.

Rückgabe der Klausur am nächsten Mittwoch, den 18. Juli 2007 in den Übungsgruppen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Von maximal	3	3	4	5	3	7	25

Aufgabe 1:

a) Geben Sie für folgende Operatoren A den Hermite'sch adjungierten Operator $A^\dagger$ an:

(i) $A=\sigma_+$, (ii) $A=\sigma_+\sigma_-$, (iii) $A=\exp\left(i\alpha\sigma_y\right)$ (α sei reell).

Hinweis: $\sigma_\pm=(\sigma_x\pm i\sigma_y)/2$. **1.5 Punkte**

b) Beim Wasserstoffatom ist eine Längenskala der Bohr'sche Radius a_0 und die Energieskala das Rydberg E_I und die Eigenenergien sind E_n mit n = 1,2, …
Von den folgenden Ausdrücken sind 3 korrekt. Welche?

(i) $a_0=\dfrac{\hbar^2}{\mu e^2}$ (ii) $E_I=\dfrac{\mu}{2}\dfrac{a_0^2}{\hbar^2}$ (iii) $E_I=\dfrac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}$

(iv) $E_I=\dfrac{e^2}{2a_0}$ (v) $E_n=-\dfrac{e^2}{2na_0}$ (vi) $E_n=\dfrac{\hbar^2 n^2}{\mu a_0^2}$ **1.5 Punkte**

Aufgabe 2: Ein System mit zwei Spin-½-Teilchen befinde sich im Zustand:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle-|-+\rangle\right).$$

a) Messen Sie zuerst den Spin des ersten Teilchens in z-Richtung. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert $+\hbar/2$ gemessen wird? **1 Punkt**

b) In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung? **1 Punkt**

c) Messen Sie nun im Zustand von (b) den zweiten Spin in x-Richtung. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert $-\hbar/2$ gemessen wird? **1 Punkt**

Aufgabe 3: Betrachten Sie ein System mit zwei Spin-½-Teilchen (k =1,2) und dem Gesamtspin $S^2=\left(\vec{S}_1+\vec{S}_2\right)^2$.

a) Drücken Sie den Gesamtspin durch S_k^2 und den gemischten Term durch die Auf- und Absteigeoperatoren der Teilchen: $S_{\pm k}=S_{xk}\pm i\,S_{yk}$ aus. **2 Punkte**

b) Geben Sie die Diagonalmatrixelemente von S^2 in der Basis der folgenden Zustände an:

$$|\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle-|-+\rangle\right)\qquad |\psi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle+|-+\rangle\right)$$

$$|\psi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++\rangle+|--\rangle\right)\qquad |\psi_4\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++\rangle-|--\rangle\right).$$

1.5 Punkte

c) Geben Sie die Eigenwerte von S^2 an.

Hilfestellung: alle Nebendiagonalelemente verschwinden in der angegebenen Basis.

0.5 Punkte

Aufgabe 4: Betrachten Sie ein Spin-½-Teilchen.

a) Geben Sie den unitären Zeitentwicklungsoperator an, wenn das Teilchen für eine Zeit *t* einem Magnetfeld in z-Richtung mit dem Hamilton-Operator: $H = -\gamma B_z \sigma_z$ unterworfen ist. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$, wenn das Teilchen sich ursprünglich im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = \cos\alpha\,|+\rangle + \sin\alpha\,|-\rangle$ befindet. **1 Punkt**

b) Betrachten Sie die Situation, wenn das Teilchen zunächst einem kurzen Puls in einem Magnetfeld in x-Richtung unterliegt, der durch den Operator: $T_+ = \exp\left(+\frac{i\pi}{4}\sigma_x\right)$ beschrieben wird. Danach unterliegt das Teilchen wie in (a) für eine Zeit *t* dem Einfluss eines Magnetfeldes in z-Richtung. Schließlich unterwirft man es einem letzten kurzen Puls, der durch den Operator: $T_- = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\sigma_x\right)$ beschrieben wird. Geben Sie, ausgehend von der expliziten 2x2 Matrix-Darstellung der Einzeloperatoren, die explizite 2x2 Matrix-Darstellung des unitären Zeitentwicklungsoperators für den gesamten Prozess an. **3 Punkte**

c) Das Teilchen befinde sich nun zu Anfang im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $S_z(t)$ nach Abschluss dieser Prozedur. **1 Punkt**

Hinweis: Es gilt: $e^{-i\Omega\sigma_w} = \mathbf{1}\cos(\Omega) - i\sin(\Omega)\sigma_w$, für die Pauli-Matrizen σ_w mit *w*= *x*,*y*,*z*, und **1** ist die 2x2 Einheitsmatrix.

Aufgabe 5: Die Eigenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom sind $\langle r,\theta,\varphi|\psi_{n,l,m}\rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$. Das Elektron unterliege nun zusätzlich einem elektrischen Feld in z-Richtung, das durch $W = qEz$ beschrieben sei. Berechnen Sie, ausgehend vom Grundzustand $|\psi\rangle = |\psi_{1,0,0}\rangle$,

a) die Energiekorrektur des Systems in 1. Ordnung Störungsrechnung, **1 Punkt**

b) die Energiekorrektur des Systems in 2. Ordnung Störungsrechnung. Dabei müssen Sie die Radialanteile der Matrixelemente nicht ausrechnen, sondern können abkürzen:

$$\int r^3 R_{10}(r) R_{nl}(r)\,dr = \chi_{nl}$$ **2 Punkte**

Hinweis: Es gilt: $z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r\, Y_1^0(\theta,\varphi)$ und $Y_0^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$.

Aufgabe 6: Betrachten Sie ein Elektron in einem Molekül, das aus drei Atomen (A,B,C) gebildet wird, die in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet sind. Mit $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle$ bezeichnen wir die drei orthonormierten Zustände des Elektrons, die zu den drei um die Kerne lokalisierten Wellenfunktionen gehören. Vernachlässigt man die Möglichkeit, dass das Elektron von einem Kern zum anderen wechselt, so kann es durch den Hamilton-Operator H_0 beschrieben werden, der als Eigenzustände die drei Vektoren $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle$ zum selben Eigenwert E_0 hat. Durch einen zusätzlichen Hamilton-Operator W sei nun die Kopplung der Atome beschrieben, für die gilt:

$$W|\varphi_a\rangle = \alpha|\varphi_b\rangle + \alpha|\varphi_c\rangle$$
$$W|\varphi_b\rangle = \alpha|\varphi_a\rangle + \alpha|\varphi_c\rangle$$
$$W|\varphi_c\rangle = \alpha|\varphi_a\rangle + \alpha|\varphi_b\rangle,$$

wobei α reell und positiv sei.

a) Stellen Sie den vollständigen Hamilton-Operator $H = H_0 + W$ auf. **1 Punkt**

b) Betrachten Sie den Operator:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Einfluss von T auf die Basiszustände? Berechnen Sie T^2, T^3 und $[H,T]$. Interpretieren Sie diese Ergebnisse. **2 Punkte**

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von T. **1 Punkt**

d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von T. **1 Punkt**

e) Bestimmen Sie, unter Verwendung der Ergebnisse von (b) und (d), die Eigenwerte von H. **1 Punkt**

Hinweis: Es ist **sehr** nützlich die Größe $\chi = -\sqrt[3]{-1}$ einzuführen. Es gilt: $\chi^{-1} = \chi^2$ und

$$\frac{1+\chi}{\chi^2} = \frac{1+\chi^2}{\chi} = -1.$$