

Kuster Lösung 2. Klausur Theorie D SS07

Aufgabe 1:

a) i) $A^+ = a_-$

ii) $A^+ = (a_+ a_-)^+ = a_-^+ a_+^+ = a_+ a_-$

iii) $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y^+ = -\sigma_y$

$$A^+ = e^{-i\alpha \sigma_y^+} = e^{i\alpha \sigma_y}$$

b) (i) richtig

(ii) = (iv) richtig

Aufgabe 2:

a) Der Projektor auf den gesuchten Zustand ist

$$P = |++\rangle \langle ++| + |+-\rangle \langle +-|$$

$$P|\psi\rangle = + \frac{1}{\sqrt{2}} |+-\rangle$$

$$P(S_{1z} = \frac{\hbar}{2}) = |P|\psi\rangle|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) Der Zustand danach ist

$$P|\psi\rangle = |+-\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$$

c) Der Projektor auf den Zustand $-\frac{\hbar}{2}$ in x-Richtung ist das entsprechende Eigenvektor von $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|)$

Im 2-Spin-System ist dann der Projektor

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle \langle ++| - |++\rangle \langle -+| + |+-\rangle \langle +-| - |--\rangle \langle -+|)$$

$$P|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+-\rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit ist dann $P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3:

$$a) H = \frac{1}{2} (\vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2 \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) = \frac{3}{2} \hbar^2 + 2 \overbrace{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}^{\vec{A}} \\ = \frac{3}{4} \hbar^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad \hookrightarrow \text{Konstante}$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y} + S_{1z} S_{2z}$$

$$S_{xi} = \frac{1}{2} (S_+ + S_-)$$

$$S_{yi} = \frac{1}{2i} (S_+ - S_-)$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= \frac{1}{4} (S_{1+} + S_{1-}) (S_{2+} + S_{2-}) + S_{1z} S_{2z} \\ &= \frac{1}{4} (S_{1+} - S_{1-}) (S_{2+} - S_{2-}) \\ &= \frac{1}{4} (S_{1+} S_{2+} + S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+} + S_{1-} S_{2-} \\ &\quad - S_{1+} S_{2-} - S_{1-} S_{2+} - S_{1-} S_{2-}) \\ &\quad + S_{1z} S_{2z} \\ &= \frac{1}{2} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) + S_{1z} S_{2z} \end{aligned}$$

b) Rohrelemente

$$H' = \frac{1}{2} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+})$$

$$H' |+-> = \frac{\hbar^2}{2} |-+> \quad H' |++> = H' |--> = 0$$

$$H' |-+> = \frac{\hbar^2}{2} |+->$$

$$\downarrow \quad H' |\chi_1> = -\frac{\hbar^2}{2} |\chi_1> \quad H' |\chi_3> = H' |\chi_4> = 0$$

$$H' |\chi_2> = \frac{\hbar^2}{2} |\chi_2>$$

$S_1^z S_2^z$ ist diagonal in der $|+->$ Basis

$$S_1^z S_2^z |\chi_1> = -\frac{\hbar^2}{4} (|+-> - |-+>)$$

$$S_1^z S_2^z |\chi_2> = -\frac{\hbar^2}{4} (|+-> + |-+>)$$

$$S_1^z S_2^z |\chi_3> = +\frac{\hbar^2}{4} (|++> + |-->) = \frac{\hbar^2}{4} |\chi_3>$$

$$S_1^z S_2^z |\chi_4> = +\frac{\hbar^2}{4} (|++> - |-->) = \frac{\hbar^2}{4} |\chi_4>$$

3-3

$$2\vec{S}_1\vec{S}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{2} & & & \\ & 1 - \frac{1}{2} & & \\ & & 0 & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Singlet} \\ \leftarrow \text{Triplet} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 4:

a) Definiere: $\omega = \gamma B_z / \hbar$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t} |+\rangle\langle+| + e^{i\omega t} |-\rangle\langle-|$$

$$U(t) |\psi\rangle = e^{-i\omega t} \cos \alpha |+\rangle + e^{i\omega t} \sin \alpha |-\rangle$$

$$S_z(t) |\psi\rangle = e^{-i\omega t} \cos \alpha |+\rangle - e^{i\omega t} \sin \alpha |-\rangle$$

$$\langle\psi| S_z(t) |\psi\rangle = \frac{\hbar}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{\hbar}{2} \cos 2\alpha$$

b)
$$\tilde{U}(t) = T_- e^{-iHt/\hbar} T_+$$

$$T_+ = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i\sigma_x)$$

$$T_- = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i\sigma_x)$$

~~$$e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t \sigma_z} = \mathbb{1} \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \sigma_z$$~~

~~$$\chi(t) = \frac{1}{2} (1 - i\sigma_x) (\mathbb{1} \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \sigma_z) (1 - i\sigma_x)$$~~

~~$$= \frac{1}{2} (1 - i\sigma_x) \left[(\cos \omega t + \sin(\omega t)) - i [\sin \omega t \sigma_z + \cos \omega t \sigma_z \sigma_x] \right]$$~~

$$T_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t + i \sin \omega t & 0 \\ 0 & \cos \omega t - i \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & -i e^{i\omega t} \\ -i e^{-i\omega t} & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & -i e^{i\omega t} + i e^{-i\omega t} \\ i e^{i\omega t} - i e^{-i\omega t} & e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t)|\gamma\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$|\langle + | \tilde{U}(t) | \gamma \rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} \right|^2 = \cos^2 \omega t$$

$$S_z \tilde{U}(t) | \gamma \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\langle \gamma | \tilde{U}^\dagger S_z \tilde{U} | \gamma \rangle = \frac{\hbar}{2} (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = \frac{\hbar}{2} \cos(2\omega t)$$

Aufgabe 5:

$$a) E_{100}^{(1)} = \langle \psi_{100} | z | \psi_{100} \rangle = 0$$

da $\psi_{100}^2(\vec{r})$ gerade in z , z aber ungerade

b)

$$W_{hel} = \langle \psi_{hel} | z | \psi_{100} \rangle$$

$$= \underbrace{\int R_{hel}^* R_{10} r^3 dr}_{\int R_{hel}^* R_{10} r^3 dr} \int Y_{el}^* \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} Y_{00} d\Omega$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \chi_{hel} \int Y_{el}^* Y_{10} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} d\Omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \chi_{hel} \int Y_{el}^* Y_{10} d\Omega$$

$$= \frac{\chi_{hel}}{\sqrt{3}} \delta_{el,1} \int_{\Omega} Y_{10} d\Omega$$

Wasserstoffserie: $E_{n=1} = E_0$
 $E_{n>1} = \frac{E_0}{n^2}$

$$E_{100}^{(2)} = \frac{q^2 E^2}{3E_0} \sum_{n>1} \frac{\chi_{10n}^2}{1 - 1/n^2}$$

$$= \frac{q^2 E^2}{3E_0} \sum_{n>1} \frac{n^2 \chi_{1n}^2}{n^2 - 1}$$

Aufgabe 6:

a) $H = E_0 \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} = W$

b) $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^3 = \mathbb{1}$

~~$\downarrow \lambda^3 = 1$ für alle Eigenwerte~~
~~Lösungen: $\lambda = \underbrace{-(-1)^{1/3}}_{= \chi}, \chi^2, \chi^3$~~

$$TW = WT = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$[H, T] = 0$; d.h. H & T haben eine gemeinsame Basis

T ist der Permutationsoperator.

c) $(-\lambda)^3 = -1 \Rightarrow \lambda = \underbrace{-(-1)^{1/3}}_{= \chi}, \chi^2, \chi^3$

6-2.

d) Es ist also einfacher, die Eigenvektoren von T zu bestimmen, die dann auch Eigenvektoren von H sein müssen.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda a + c \\ a - \lambda b \\ b - \lambda c \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda a = c \\ a = \lambda b \\ b = \lambda c \end{array}}$$

e) 1) $\lambda = 1 \quad a = b = c = 1$

$$\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eigenwert } 2\alpha$$

$$\rightarrow \text{Energie } \underline{E_0 + 2\alpha}$$

2) $\lambda = x \quad c = 1, \quad a = 1/x, \quad b = x$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha\alpha \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1+x \\ & & \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \omega \begin{pmatrix} x^2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \omega = \alpha \frac{1+x}{x^2} = -\alpha \rightarrow E = E_0 - \alpha$$

$$3) \lambda = x^2$$

$$c = 1$$

$$a = 1/x^2 = x$$

$$b = x^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1+x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\omega = -\alpha \frac{1+x^2}{x} = -\alpha$$

$$E = E_0 - \alpha$$