Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) Mittwoch, 16.07.2008, 14-17 Uhr
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) Rückgabe: Freitag, 18.07.2008, 13 Uhr

Bemerkung: Beachten Sie die Hinweise am Ende der Aufgabenstellung!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Bemerkung: Die Unterpunkte dieser Aufgabe sind voneinander unabhängig!

a) Drei Operatoren A_1, A_2, A_3 erfüllen die Vertauschungsrelationen $[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k$. Was sind die möglichen Eigenwerte von $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$. Was sind die möglichen Eigenwerte von A_1 bei gegebenem Eigenwert von $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$? 2P

b) Der differentielle elastische Wirkungsquerschnitt sei $d\sigma/d\Omega = 3\sigma_{el}\cos^2\theta/(4\pi)$. Welche Streuphasen δ_l sind ungleich Null? Berechnen Sie diese als Funktion von σ_{el} und k. 3P

c) Betrachten Sie den starren Rotator

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

i) Geben Sie die Eigenzustände und zugehörigen Energieeigenwerte an. 1P

ii) Das System befinde sich in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion $\Psi(\theta, \varphi) = N(\sin\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi + \sqrt{3}\cos\theta)$ gegeben ist, wobei N ein Normierungsfaktor ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das System in einem Zustand mit Quantenzahlen $l = 1$ und $m = 0$ zu finden? 3P

d) Für ein physikalisches System sei der vierdimensionale Zustandsraum aufgespannt durch die Basisvektoren $|j, m_z\rangle$, welche gemeinsame Eigenvektoren zu den Drehimpulsoperatoren $\vec{J}^2$ und J_z bezüglich der Eigenwerte $j(j+1)\hbar^2$ bzw. $m_z\hbar$ mit $j = 0$ oder 1 und $-j \le m_z \le j$ sind. Drücken Sie die gemeinsamen Eigenvektoren $|j, m_x\rangle$ zu $\vec{J}^2$ und J_x durch die Kets $|j, m_z\rangle$ aus. 3P

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

a) Geben Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände in der Ortsdarstellung an. 3P

(bitte wenden)

b) Berechnen Sie für stationäre Zustände die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators und Δx, wobei $(\Delta x)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ ist, zunächst für den Grundzustand und ersten angeregten Zustand und dann für den allgemeinen Fall. 3P

Hinweis: Verwenden Sie die algebraische Darstellung.

c) Das Wellenfunktion des Systems befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$\Psi(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\beta x + (\beta x)^2\right) e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}},$$

mit $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$. Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion und des Ortserwartungswertes $\langle X \rangle(t)$. 3P

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei der eindimensionale harmonischen Oszillator. Betrachten Sie normierte Eigenzustände zum Absteigeoperator a, $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Berechnen Sie den Erwarungswert der Energie $\langle H \rangle_\alpha$ und die Breite ΔE 3P

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortes und Impulses. 1P

c) Berechnen Sie die Koeffizienten c_n in der Entwicklung nach Eigenfunktionen des Hamiltonoperators 2P

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle .$$

d) Das System befinde sich im Zustand $|\alpha\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P}(n)$, das System in einem Zustand mit Energie $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ zu finden. 1P

e) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung des Orts- und Impultserwartungswertes. 2P

Aufgabe 4(6 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung von ebenen Wellen am Yukawa Potential

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha > 0.$$

(bitte wenden)

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ in Bornscher Näherung. 3P

b) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt. 2P

c) Was findet man im Limes $\alpha \to 0$ für den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt? 1P

Nützliche Hinweise und Formeln

Hermite Polynome

$$H_0(z) = 1$$
$$H_1(z) = 2z$$
$$H_2(z) = 4z^2 - 2$$
$$H_3(z) = 8z^3 - 12z$$
$$H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z)\, e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

Legendre Polynome

$$P_0(z) = 1$$
$$P_1(z) = z$$
$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$
$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$
$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$$

Normierung:

$$\int_{-1}^{1} P_m(z) P_n(z) = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Kugelflächenfunktionen

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{1-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin\theta$$
$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$
$$Y_{11}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta$$

Normierung:

$$\int Y^*_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \sin\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$