Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Freitag, 24.10.2008, 16-19 Uhr

Bemerkung: Beachten Sie die Hinweise am Ende der Aufgabenstellung!

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Unterpunkte dieser Aufgabe können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Wie hängen die Energieniveaus des Wasserstoffatoms von den Quantenzahlen n, l, m ab? Geben Sie den Entartungsgrad an.

b) Geben Sie den Zeitentwicklungsoperator für den Fall eines nicht explizit zeitabhängigen Hamiltonoperators an. Ist dieser hermitesch und/oder unitär?

c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ in Bornscher Näherung für die Streuung an einem rotationssymmetrischen Potential der Form

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} .$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Zweizustandssystem mit dem Hamiltonoperator $H = \begin{pmatrix} -E & W \\ W & E \end{pmatrix}$ gegeben in der Basis $\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen.

b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Zustand Ψ_1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > t_0$ im Zustand Ψ_2?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem Zentralpotential. In unserem Fall wollen wir für dieses Potential den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 betrachten. Die z-Komponente L_z des Drehimpulsoperators vertauscht mit dem Hamiltonoperator H.

a) Was sind die möglichen Eigenwerte des zugehörigen Hamiltonoperators H?

(bitte wenden)

b) Wir legen nun von außen zusätzlich ein (schwaches) homogenes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ an. Geben Sie ein Vektorpotential $\vec{A}$ an, aus welchem Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ erhalten. Wie lautet der Hamiltonoperator H' für dieses System? Zeigen Sie, dass H' auf folgende Form gebracht werden kann:

$$H' = H + \omega_L L_z,$$

wenn man Terme der Ordnung $\mathcal{O}(B^2)$ vernachlässigt. Was ergibt sich für den Koeffizienten ω_L?

c) Was sind die möglichen Eigenwerte von H'?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei ein rotationssymetrisches Potential der Form

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} +\infty & |\vec{x}| \leq R \\ 0 & |\vec{x}| > R \end{cases} .$$

Betrachten Sie P-Wellen ($l = 1$) Streuung an diesem Potential.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung für P-Wellen-Streuung durch

$$u_k(r) = C\left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + a\left(\frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr)\right)\right]$$

gegeben ist, wobei a noch zu bestimmen ist. (C ist eine Normierungskonstante).

b) Bestimmen Sie a und berechnen Sie die Streuphase δ_1.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie ein Potential $V(x)$ der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ -V_0\delta(x) & -a \leq x \leq a \ , \quad V_0 > 0 \, . \\ \infty & x > a \end{cases}$$

Betrachten Sie gebundene Zustände in diesem Potential.

a) Geben Sie die Randbedingungen für $x = \pm a$ und die Anschlussbedingungen für $x = 0$ an.

b) Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen für stationäre Zustände. Die Wellenfunktionen müssen nicht normiert werden. Hinweis: In dieser Konfiguration gibt es drei Klassen von Lösungen:

- $E < 0$, symmetrische Wellenfunktion
- $E > 0$, symmetrische Wellenfunktion
- $E > 0$, antisymmetrische Wellenfunktion .

Für die symmetrischen Fälle findet man transzendente Gleichungen, aus denen sich die Energie ergibt.

(bitte wenden)

Nützliche Hinweise und Formeln

Hermite Polynome

$$H_0(z) = 1$$
$$H_1(z) = 2z$$
$$H_2(z) = 4z^2 - 2$$
$$H_3(z) = 8z^3 - 12z$$
$$H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z)\, e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

Legendre Polynome

$$P_0(z) = 1$$
$$P_1(z) = z$$
$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$
$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$
$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$$

Normierung:

$$\int_{-1}^{1} P_m(z) P_n(z) = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

Kugelflächenfunktionen

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{1-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin\theta$$
$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$
$$Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta$$

Normierung:

$$\int Y^*_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \sin\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

sphärische Bessel-Funktionen

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z} \qquad n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z}$$