Theoretische Physik D (Quantenmechanik I)

Klausur

Sommersemester 2009 — Prof. Dr. Ulrich Nierste, Dr. Christopher Smith, Jennifer Girrbach

Ausgabe: 18.7.2009, 11 Uhr — Abgabe: 18.7.2009, 13 Uhr — Besprechung: 26.7.2009

Ergebnisse, die gewertet werden sollen, bitte doppelt unterstreichen. Es werden keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz vergeben. Hinreichend zum Bestehen sind 50 Punkte unter Einrechnung der Sonderpunkte aus den Übungen. Lesen Sie zunächst die Hinweise, die Sie ohne Beweis verwenden dürfen, um Ideen zur Lösung der Aufgaben zu finden.

Name: ______ Note: ja/nein

Matrikelnummer: ______ Gruppe: ______

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Studienfach: Physik Mathematik Informatik anderes: ________________

Studiengang: Diplom Bachelor Master Lehramt

Aufgabe:	1	2	3	4	5	$\sum$

Aufgabe 1: (20 Punkte) Drehimpuls

Der Bahndrehimpuls-Operator ist $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie $[X_j, L_k]$ und $[P_j, L_k]$.

b) (4 Punkte) Berechnen Sie $\left[X_j^2, L_k\right]$, $\left[\vec{X}^2, L_k\right]$ und $\left[\vec{X}\cdot\vec{P}, L_k\right]$.

c) (4 Punkte) $\vec{S}$ sei der Spin-Operator und $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ der Gesamtdrehimpuls. Drücken Sie $\vec{J}^2$ durch $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$ L_3, S_3 und die Leiteroperatoren $L_\pm = L_1 \pm iL_2$, $S_\pm = S_1 \pm iS_2$ aus.

d) (4 Punkte) Die gemeinsamen Eigenzustände von $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$, L_3 und S_3 seien $|l\, m_l\, s\, m_s\rangle$. Zeigen Sie, dass $|l\, l\, s\, s\rangle$ Eigenzustand von $\vec{J}^2$ ist.

e) (4 Punkte) Betrachten Sie den Fall $s = 1/2$ und den Zustand

$$|\psi\rangle \;=\; a_{lm}|l\ m-\frac{1}{2}\ s\ \frac{1}{2}\rangle \;+\; b_{lm}|l\ m+\frac{1}{2}\ s\ -\frac{1}{2}\rangle.$$

Welche Bedingung muss das Verhältnis b_{lm}/a_{lm} erfüllen, damit $|\psi\rangle$ Eigenzustand von $\vec{J}^2$ zum Eigenwert $j = l + 1/2$ ist?

Aufgabe 2: (20 Punkte) Potenzialstufe

Betrachten Sie das Potenzial

$$V(x) \quad := \quad \Theta(x)V_0 \ = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ V_0 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} ,$$

wobei $V_0 > 0$ ist.

a) (6 Punkte) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für $E > V_0$ mit dem Ansatz

$$\psi(x) \quad = \quad \Theta(-x)\left(e^{ikx} + Re^{-ikx}\right) \ + \ \Theta(x)Te^{iqx}.$$

Geben Sie dazu k und q als Funktion von E und V_0 an und bestimmen Sie R und T. Sie dürfen dabei R und T durch k und q ausdrücken.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten $|R|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $(q/k)|T|^2$ als Funktion von E/V_0 für die Lösung aus Teilaufgabe a).

c) (6 Punkte) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung nun für $0 < E < V_0$ mit dem Ansatz

$$\psi(x) \quad = \quad \Theta(-x)\left(e^{ikx} + Re^{-ikx}\right) \ + \ \Theta(x)\psi_R(x),$$

d.h. bestimmen Sie R und $\psi_R(x)$.

d) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten $|R|^2$ und die Eindringtiefe

$$d \quad = \quad \frac{\int_0^\infty x\,|\psi_R(x)|^2\,dx}{\int_0^\infty |\psi_R(x)|^2\,dx}.$$

für die Lösung aus Teilaufgabe c).

Aufgabe 3: (20 Punkte) Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H \quad = \quad \hbar\omega\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}\right] \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{x_0 P}{\hbar}\right) \qquad \text{und} \qquad x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}. \tag{1}$$

Die Leiter-Operatoren erfüllen

$$\left[a, a^\dagger\right] \quad = \quad 1, \qquad a|n\rangle \ = \ \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle \ = \ \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

wobei $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$, Energie-Eigenzustand zum Eigenwert $\hbar\omega(n + 1/2)$ ist.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\left[X, e^{\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\right] \tag{2}$$

wobei $l \in \mathbb{R}$ ist.

b) (4 Punkte) Betrachten Sie nun

$$|l\rangle \quad := \quad e^{\frac{i}{\hbar}\,l\,P}|0\rangle,$$

und berechnen Sie $a|l\rangle$ mit Hilfe von Gl. (2).

c) (4 Punkte) Berechnen Sie $\langle l|P|l\rangle$ (1 Punkt) und $\langle l|X|l\rangle$ (3 Punkte). Verwenden Sie dabei $\langle 0|X|0\rangle = \langle 0|P|0\rangle = 0$.
d) (4 Punkte) Berechnen Sie die Unschärfen ΔX und ΔP im Zustand $|l\rangle$. Verwenden Sie dabei $\langle 0|X^2|0\rangle = x_0^2/2$ und $\langle 0|P^2|0\rangle = \hbar^2/(2x_0^2)$.
e) (4 Punkte) Entwickeln Sie $|l\rangle$ nach Energie-Eigenkets $|n\rangle$, d.h. geben Sie die Koeffizienten $\langle n|l\rangle$ in $|l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|l\rangle$ an.

Aufgabe 4: (20 Punkte) Landau-Niveaus

Betrachten Sie den Hamilton-Operator $H = \frac{1}{2m}\vec{\Pi}^2$, wobei der kinetische Impuls $\vec{\Pi}$ durch $\vec{\Pi} = \vec{P} + e\vec{A}(\vec{X})$ gegeben ist. $\vec{P}$ ist der kanonische Impuls. Es sei $\vec{A} = (0, BX_1, 0)$ mit zeitlich konstantem B.

a) (6 Punkte) Berechnen Sie $[\Pi_j, \Pi_k]$ aus den Vertauschungsrelationen $[P_j, P_k] = [X_j, X_k] = 0$ und $[X_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}$.
b) (10 Punkte) Bringen Sie H in die Form

$$H \quad = \quad \frac{\Pi_3^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad \text{mit} \qquad \left[a, a^\dagger\right] = 1.$$

Drücken Sie a durch Π_1 und Π_2 aus und bestimmen Sie die Zyklotronfrequenz ω_c.
c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Energie-Eigenwerte (die sog. Landau-Niveaus) durch

$$E_{k_z,n} \quad = \quad \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

mit $k_z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind.

Aufgabe 5: (20 Punkte) Zeitentwicklung eines Zweizustandssystems

Die Matrixdarstellung eines Hamilton-Operators $H(t)$ sei

$$\widehat{H}(t) \quad = \quad \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & -i\cos(\Omega t) \\ i\cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dabei ist t die Zeit, und ω und Ω sind reelle und positive Parameter, die nicht von t abhängen.
a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte von $\widehat{H}$.
b) (2 Punkte) Zerlegen Sie $\widehat{H}$ nach Pauli-Matrizen. D.h. bestimmen Sie die Koeffizienten $A_n(t)$ in

$$\widehat{H} \quad = \quad A_0(t)\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{3} A_n(t)\sigma_n. \tag{4}$$

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass man $\widehat{H}$ in der Form

$$\widehat{H} \quad = \quad \frac{\hbar\omega}{2}\left[\mathbb{1}\cos\frac{\Omega t}{2} \;-\; i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\Omega t}{2}\right]\sigma_2\left[\mathbb{1}\cos\frac{\Omega t}{2} \;+\; i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\Omega t}{2}\right] \tag{5}$$

mit $\vec{n}^2 = 1$ schreiben kann und bestimmen Sie $\vec{n}$.
d) (4 Punkte) $\psi(t)$ bezeichne eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial\psi(t)/(\partial t) = \widehat{H}(t)\psi(t)$. Welche Bewegungs-Gleichung erfüllt

$$\chi(t) \quad := \quad e^{i\Omega t\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2}\,\psi(t)\ ? \tag{6}$$

Geben Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung von Gl. (5) an.
e) (6 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $\chi(t)$ als Funktion von ω, Ω, t und $\chi(0)$. Geben Sie dann die Lösung für $\psi(t)$ an.

Hinweise

- $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ und $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$.
- Pauli-Matrizen:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \sigma_l, \qquad \mathrm{tr}\,(\sigma_j \sigma_k) = 2\delta_{jk},$$
$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Für $\phi \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{n}^2 = 1$ gilt:

$$e^{i\phi \vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2} = \mathbb{1} \cos \frac{\phi}{2} + i\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \sin \frac{\phi}{2}$$

- Drehimpuls:

$$[J_j, J_k] = i\hbar \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} J_l, \qquad \vec{J}^2 |j\,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j\,m\rangle, \qquad J_3 |j\,m\rangle = \hbar m |j\,m\rangle,$$
$$J_+ |j\,m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j\,m{+}1\rangle, \qquad J_- |j\,m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j\,m{-}1\rangle.$$

- $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.
- $e^{tA} B e^{-tA} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n$ mit $B_1(t) = [A, B]$ und $B_{n+1}(t) = [A, B_n]$.
- $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$, sofern $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$.
- Harmonischer Oszillator: $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$.
- Zeitunabhängige eindimensionale Schrödinger-Gleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$.