

Quantenmechanik I SS 11

- ☐ Bachelor, Prüfungsordnung 2008
- ☐ Bachelor, Prüfungsordnung 2010
- ☐ Diplom

Erste Klausur
19.07.2011
Einsicht 03.08.2011

Name: _____

Matrikel-Nr: _____

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 1: Schrödingergleichung

(11 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m , das sich in einer Dimension bewegen kann. In Teilaufgaben (a) bis (c) sei die potenzielle Energie $V(x) = 0$, d.h. das Teilchen bewegt sich frei.

- a) Geben Sie den Ortsoperator X , Impulsoperator P und Hamiltonoperator H in der Ortsdarstellung an. (3 Punkte)
- b) Zeigen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[X, P] = i\hbar \quad , \quad [H, P] = 0 \quad .$$

Welche physikalische Bedeutung hat die zweite Gleichung? (3 Punkte)

- c) Geben Sie die zeitunabhängige und die zeitabhängige Schrödingergleichung an. Geben Sie die allgemeinen Lösungen $\phi_E(x)$ und $\psi_E(x, t)$ der zwei Gleichungen für eine vorgegebene Energie $E > 0$ an. (4 Punkte)
- d) Zeigen Sie, wie man für einen beliebigen, zeitunabhängigen Hamiltonoperator H Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung aus Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung konstruiert. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Teilchen im δ -Potential

(11 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m , das sich in einer Dimension bewegen kann. Die potenzielle Energie sei gegeben durch $V(x) = -a\delta(x)$ mit $a > 0$.

Hinweis: In den Teilaufgaben (b) bis (d) ist nach dem *Lösungsweg* gefragt. Eine einfache Angabe der Ergebnisse ist *nicht* ausreichend.

- a) Geben Sie den Hamiltonoperator des Systems und die zeitunabhängige Schrödingergleichung an. (1 Punkt)

- b) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ der Wellenfunktion $\psi(x)$ die Sprungbedingung

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \psi'(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \psi'(x) = \frac{2ma}{\hbar^2} \psi(0)$$

erfüllt.

(3 Punkte)

- c) Lösen Sie die Eigenwertgleichung für $E < 0$. Definieren Sie dazu

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_- & \text{für } x < 0 \\ \psi_+ & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und bestimmen Sie ψ_- und ψ_+ . Machen Sie dabei deutlich, welche Forderungen die Wellenfunktion erfüllen muß. Wie viele Zustände mit $E < 0$ gibt es? Geben Sie die entsprechenden Energie-Eigenwerte an.

(5 Punkte)

- d) Geben Sie zu jedem Zustand mit $E < 0$ eine normierte Eigenfunktion an.

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Wasserstoffatom und Störungstheorie

(15 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse μ , das sich in drei Dimensionen bewegen kann. Die potenzielle Energie ist gegeben durch $V(\mathbf{x}) = -\gamma/|\mathbf{x}|$. Vernachlässigen Sie den Spin des Teilchens.

- a) Geben Sie den Hamiltonoperator H_0 des Systems an. (1 Punkt)
- b) Die Eigenzustände $|n, l, m\rangle$ von H_0 werden vollständig klassifiziert durch die Eigenwerte von H_0 , $\mathbf{L}^2$ und L_3 , wobei $\mathbf{L} = \mathbf{X} \times \mathbf{P}$ der Bahndrehimpuls-Operator ist. Geben Sie die möglichen Kombinationen der Quantenzahlen (n, l, m) sowie die zugehörigen Eigenwerte der Operatoren an. (Eine Herleitung dieser Relationen ist hier nicht gefragt.) (3 Punkte)
- c) Entwickeln Sie die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{\mu^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$$

zur zweiten Ordnung in $\mathbf{p}^2/(\mu^2 c^2)$ und konstruieren Sie daraus einen Korrekturterm H' zum Hamiltonoperator H_0 des Wasserstoffatoms. Drücken Sie H' durch H_0 und den Operator R aus, wobei R in der Ortsdarstellung definiert ist durch

$$R\psi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x}) \quad .$$

(3 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Kommutatoren $[H', \mathbf{L}^2]$ und $[H', L_3]$. Dies ist ohne Rechnung möglich. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (1 Punkt)

e) Berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustands-Energie E_1 in erster Ordnung Störungstheorie. Drücken Sie die Energiekorrektur durch μ , γ , $\hbar$ und c aus.

Hinweis: Die Darstellung der Eigenfunktionen von H_0 in Kugelkoordinaten ist

$$\psi_{nlm}^{(0)}(r, \theta, \phi) = f_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad ,$$

wobei $Y_{lm}(\theta, \phi)$ die Kugelflächenfunktionen sind und

$$f_{10}(r) = 2a^{-3/2} e^{-\frac{r}{a}} \quad .$$

Dabei ist $a = \hbar^2/(\mu\gamma)$ der Bohr'sche Radius. (7 Punkte)

Aufgabe 4: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (18 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m , das sich in zwei Dimensionen (x_1 und x_2) bewegen kann. Die potenzielle Energie des Teilchens sei gegeben durch

$$V(x_1, x_2) = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j^2 x_j^2 \quad ,$$

mit $\omega_i > 0$ ($i = 1, 2$).

Hinweis: Alles, was Sie über den *eindimensionalen* harmonischen Oszillator wissen, dürfen Sie in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator H des (quantenmechanischen) Systems an. (1 Punkt)

b) Definieren Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X_j}{x_{0,j}} + i \frac{P_j x_{0,j}}{\hbar} \right) \quad , \quad a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X_j}{x_{0,j}} - i \frac{P_j x_{0,j}}{\hbar} \right)$$

mit $x_{0,j} = \sqrt{\hbar/(m\omega_j)}$. Bestimmen Sie die Kommutatoren $[a_j, a_k]$, $[a_j^\dagger, a_k^\dagger]$ und $[a_j, a_k^\dagger]$ mit $j, k \in \{1, 2\}$. (2 Punkte)

c) Drücken Sie den Hamiltonoperator H durch die a_j und $a_j^\dagger$ ($j = 1, 2$) aus. Analog zum eindimensionalen harmonischen Oszillator kann man nun die Energieeigenzustände des Systems schreiben als

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0, 0\rangle \quad ,$$

wobei der Grundzustand $|0, 0\rangle$ die Gleichungen

$$a_1|0, 0\rangle = a_2|0, 0\rangle = 0$$

erfüllt. Bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenwerte E_{n_1, n_2} . (3 Punkte)

- d) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$. Der Drehimpulsoperator in „z-Richtung“ ist definiert als

$$L_3 = X_1 P_2 - X_2 P_1 \quad .$$

Bestimmen Sie den Kommutator $[H, L_3]$. Dies ist ohne Rechnung möglich. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (1 Punkt)

- e) Wir betrachten weiterhin den Spezialfall $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$. Zeigen Sie, dass die möglichen Energie-Eigenwerte gegeben sind durch

$$E_n = \hbar\omega(n + 1)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \pm ia_2) \quad , \quad a_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{\dagger} \mp ia_2^{\dagger})$$

und berechnen Sie $[a_{\pm}, a_{\pm}^{\dagger}]$ und $[a_{\pm}, a_{\mp}^{\dagger}]$. (3 Punkte)

- f) Drücken Sie H und L_3 durch die Operatoren $a_{\pm}$ und $a_{\pm}^{\dagger}$ aus. Geben Sie zu jedem Energie-Eigenwert E_n ($n \in \mathbb{N}_0$) die möglichen Eigenwerte von L_3 an. (8 Punkte)