

Aufgabe 1: Verschiedenes

18 Punkte

Die Probleme in dieser Aufgabe können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Wie lautet die Heisenberg-Gleichung für einen hermiteschen Operator A ?

Lösung:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

- b) Ist der Hamiltonoperator hermitesch oder unitär? Was folgt daraus?

Lösung:

hermitesch $\Rightarrow$ Eigenwerte (Energie) reell

- c) Ist der Zeitentwicklungsoperator hermitesch oder unitär? Was folgt daraus?

Lösung:

unitär $\Rightarrow$ Erhaltung der Norm / Wahrscheinlichkeitserhaltung

- d) Geben Sie die Energieniveaus des Wasserstoffatoms an. Wie sind die Energieniveaus entartet?

Lösung:

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2}, n = 1, 2, \dots \quad n^2\text{-fach entartet}$$

- e) Betrachten Sie einen unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{a}{2} \\ +\infty & |x| \geq \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{5a}} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \right].$$

zur Zeit $t = 0$. Welche Energien werden mit welcher Wahrscheinlichkeit gemessen? Ändert sich diese Wahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit? Wie sieht die Wellenfunktion zu einem Zeitpunkt $t > 0$ aus?

Lösung:

$\langle x|1\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ und $\langle x|2\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$ sind Eigenfunktionen des Problems. Die Energien sind also

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2, \quad E_2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2$$

Die Wellenfunktion lässt sich also in die Form

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}}(|1\rangle + 2|2\rangle)$$

bringen, woraus sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P(E = E_1) = |\langle 1|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{5}, \quad P(E = E_2) = |\langle 2|\Psi\rangle|^2 = \frac{4}{5}$$

ergeben, die nicht von der Zeit abhängen. Die Zeitentwicklung ist

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{5a}} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-E_1 t/\hbar} + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) e^{-E_2 t/\hbar} \right]$$

f) Gegeben sei der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \cos^2 \theta \right).$$

Bestimmen Sie die Streuphasen δ_l . Was erhalten Sie für $\text{Im} f(\theta, \phi)|_{\theta=0}$

Hinweis:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$$

Lösung:

Allgemeiner Zusammenhang:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2.$$

$P_l(\cos \theta)$ enthält Beitrag der Form $\cos^l \theta \Rightarrow$ nur Beiträge von $l = 0, 1$. Interferenzterm $\propto \cos \theta$ nicht vorhanden $\Rightarrow$

$$e^{i\delta_0 - i\delta_1} + e^{-i\delta_0 + i\delta_1} = e^{-i\delta} (1 + e^{2i\delta}) = 0$$

mit $\delta = \delta_1 - \delta_0$. Also ist $\delta = \pi/2$. Aus der allgemeinen Formel folgt weiter $\sin^2 \delta_0 = \sin^2 \delta_1 = \frac{1}{2}$ und mit der Phasendifferenz von oben kann man

$$\delta_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \delta_1 = \frac{3\pi}{4}$$

ableiten.

$$\text{Im} f(\theta = 0) = \frac{2}{k}$$

Aufgabe 2:

12 Punkte

Gegeben sei ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} -V_0\delta(x+d) & x < 0 \\ +\infty & x \geq 0 \end{cases}, \quad V_0 > 0, d > 0,$$

für ein Teilchen der Masse m .

- Skizzieren Sie das Potential.
- Die Ableitung der Wellenfunktion ist unstetig bei $x = -d$. Berechnen Sie den Sprung der Ableitung an dieser Stelle.

Lösung:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x) &= E\Psi(x) \\ \int_{-d-\epsilon}^{-d+\epsilon} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x) &= 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi'_+(-d) - \Psi'_-(-d)) &= V_0\Psi(-d) \\ \Psi'_+(-d) - \Psi'_-(-d) &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\Psi(-d) \end{aligned}$$

- Untersuchen Sie gebundene Zustände mit $E < 0$. Finden Sie eine Gleichung der Form

$$\tanh \kappa d = \dots \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2},$$

aus der sich die Energie des gebundenen Zustandes graphisch bestimmen lässt.

Lösung:

Ansatz:

$$\Psi_-(x) = Ae^{\kappa x}, \quad x < -d, \quad \Psi_+(x) = B_1e^{-\kappa x} + B_2e^{\kappa x}, \quad -d < x < 0$$

mit $\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ Ausnutzen der Anschlussbedingungen

$$\begin{aligned} \Psi_-(-d) &= \Psi_+(-d) \\ \Psi_+(0) &= 0 \\ \Psi'_+(-d) - \Psi'_-(-d) &= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\Psi(-d) \end{aligned}$$

ergibt

$$\tanh \kappa d = \frac{\kappa}{-\kappa + \frac{2mV_0}{\hbar^2}} = \frac{\kappa d}{-\kappa d + \eta d}, \quad \eta = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

- Wie viele gebundene Zustände existieren? Finden Sie eine Bedingung, unter welcher gebundene Zustände existieren.

(bitte wenden)

Lösung:

Die Kurven auf der rechten und linken Seite haben maximal einen Schnittpunkt für $\kappa d > 0$. Betrachtet man die Ableitung am Ursprung, so findet man die Bedingung

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}d > 1$$

für die Existenz einer Lösung.

Aufgabe 3:

10 Punkte

Gegeben sei der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

- a) Geben Sie die möglichen Energieeigenwerte und ihre Entartung an.

Lösung:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

nicht entartet!

- b) Berechnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustands im Ortsraum.

Lösung:

Die Grundzustandswellenfunktion lässt sich am leichtesten aus

$$a|0\rangle = 0$$

berechnen. Im Ortsraum ergibt sich hieraus die Differentialgleichung

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\Psi(x) = 0,$$

aus der sich durch Separation der Variablen die Lösung

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ergibt. Ψ_0 ergibt sich aus der Normierung zu

$$\Psi_0 = \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

- c) Fügen Sie dem Hamiltonoperator nun einen Störterm der Form

$$W = kX^4, \quad k > 0$$

hinzu und berechnen Sie die Energie und Wellenfunktion des Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie.

(bitte wenden)

Lösung:

Drücke X^4 durch $(a + a^\dagger)^4$ aus

$$\begin{aligned} X^4 &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (a + a^\dagger)^4 \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(a^4 + a^3 a^\dagger + a^2 a^\dagger a + a a^\dagger a^2 + a^\dagger a^3 \right. \\ &\quad + a^2 (a^\dagger)^2 + a a^\dagger a a^\dagger + a (a^\dagger)^2 a + a^\dagger a^2 a^\dagger + a^\dagger a a^\dagger a + (a^\dagger)^2 a^2 \\ &\quad + a (a^\dagger)^3 + a^\dagger a (a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^2 a a^\dagger + (a^\dagger)^2 a \\ &\quad \left. + (a^\dagger)^4 \right). \end{aligned}$$

Störung der Energie

$$\Delta E_0 = \langle 0|W|0\rangle = k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 0|a^2 (a^\dagger)^2 + a a^\dagger a a^\dagger|0\rangle = 3k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2.$$

Korrekturen zur Wellenfunktion:

$$|0\rangle' = |0\rangle + \sum_{n \neq 0} \frac{\langle n|W|0\rangle}{E_0 - E_n} |n\rangle$$

Es tragen nur $\langle 2|W|0\rangle$ und $\langle 4|W|0\rangle$ bei:

$$\langle 2|W|0\rangle = k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 2|a (a^\dagger)^3 + a^\dagger a (a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^2 a a^\dagger|0\rangle = 6\sqrt{2}k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2.$$

$$\langle 4|W|0\rangle = k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle 4|(a^\dagger)^4|0\rangle = 2\sqrt{6}k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2.$$

Also:

$$|0\rangle' = |0\rangle - k \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}|2\rangle + \frac{2\sqrt{6}}{4}|4\rangle \right)$$

Aufgabe 4:

6 Punkte

Betrachten Sie ein Potential der Form

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ 0 & r \geq 0 \end{cases}, \quad V_0 > 0.$$

mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f_k^{(B)}(\theta, \phi)$ in Bornscher Näherung.

(bitte wenden)

Lösung:

Mit $\vec{K} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$ ist die Streuamplitude in Bornscher Näherung gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &= \frac{2mV_0}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{K}\vec{r}'} = \frac{m}{\hbar^2} V_0 \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\cos\theta' e^{-iKr' \cos\theta'} \\ &= \frac{m}{\hbar^2} V_0 \int_0^R r'^2 dr' \frac{1}{-iKr'} (e^{-iKr'} - e^{iKr'}) = \frac{2m}{k\hbar^2} V_0 \int_0^R r' dr' \sin(Kr') \\ &= \frac{2mV_0}{k^3\hbar^2} (\sin KR - KR \cos KR) \quad \text{mit} \quad K = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung.

Lösung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2$$

Aufgabe 5:

8 Punkte

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und einem magnetischen Moment $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ befinde sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

a) Stellen Sie den Hamiltonoperator auf.

Lösung:

$$H = -\vec{M}\vec{B} = -\gamma B_0 S_z$$

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

in der Basis der Eigenvektoren von S_z . Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustandes.

Lösung:

Mit den Eigenzuständen von S_z , $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ gilt

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$$

und damit für die Zeitentwicklung

$$|+\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} |\uparrow\rangle + i e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} |\downarrow\rangle).$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen zu einem Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $|+\rangle$?

(bitte wenden)

Lösung:

$$\begin{aligned} P_{++}(t) &= |\langle + | (|+\rangle(t)) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |(\langle \uparrow | - i \langle \downarrow |)(e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} | \uparrow \rangle + i e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t} | \downarrow \rangle)|^2 \\ &= \frac{1}{4} |e^{\frac{i\gamma B_0}{2}t} + e^{-\frac{i\gamma B_0}{2}t}|^2 = \cos^2 \frac{\gamma B_0}{2} t \end{aligned}$$