MODERNE THEORETISCHE PHYSIK I

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)

Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

KLAUSUR II

Samstag, 20.10.2012, 9 – 12 Uhr

Aufgabe 1: Verschiedenes	14 Punkte

Die Probleme in dieser Aufgabe können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Geben Sie die Vertauschungsrelationen an, die die Drehimpulsoperatoren erfüllen. Lassen sich L_x, L_y und L_z gleichzeitig diagonalisieren?

b) Geben Sie die möglichen Eigenwerte der Drehimpulsoperatoren $\vec{L}^2$ und L_z an.

c) Geben Sie eine Matrixdarstellung von L_z, L_+, L_- für Drehimpuls $L = 1$ an.

d) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a. Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators mit Eigenwert $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Zeigen Sie durch Ausnutzung der Vertauschungsrelationen, dass $a|n\rangle$ ein Eigenzustand zu Eigenwert $\hbar\omega(n - 1 + \frac{1}{2})$ ist.

e) Betrachten Sie den starren Rotator mit Hamiltonoperator $H = \frac{\vec{L}^2}{2I}$. Der Rotator befinde sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem Zustand, der durch die normierte Wellenfunktion $u(\theta, \phi)$ beschrieben wird. Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung des Drehimpulsquadrates $\vec{L}^2$ den Wert $2\hbar^2$ und gleichzeitig für L_z den Wert null zu messen?

f) Gegeben seien die Operatoren

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Operatoren lassen sich gleichzeitig diagonalisieren? Welche Operatoren bilden ein vollständiges System kommutierender Observablen?

g) Geben Sie den Hamiltonoperator für ein geladenes Teilchen mit Masse m, Ladung e und magnetischem Moment $\vec{M}$ in einem elektromagnetischen Feld an.

Aufgabe 2:	8 Punkte

Gegeben sei ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} -V_0\delta(x) & |x| < a \\ +\infty & |x| \geq a \end{cases}, \qquad V_0 > 0,\, a > 0\,,$$

für ein Teilchen der Masse m.

a) Skizzieren Sie das Potential.

b) Die Ableitung der Wellenfunktion ist unstetig bei $x = 0$. Berechnen Sie den Sprung der Ableitung an dieser Stelle.

c) Untersuchen Sie gebundene Zustände mit $E > 0$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Problems. Wie viele Lösungen gibt es?

(bitte wenden)

Aufgabe 3: — 10 Punkte

Gegeben sei der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 .$$

Betrachten Sie normierte Eigenzustände zum Absteigeoperator a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle .$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle H\rangle_\alpha$ und die Breite ΔE.

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von Orts- und Impulsoperator.

c) Berechnen Sie die Koeffizienten c_n in der Entwicklung nach Eigenfunktionen des Hamiltonoperators

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0} c_n|n\rangle , \quad H|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle$$

d) Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\alpha\rangle$. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung von Orts- und Impulserwartungswert.

Aufgabe 4: — 6 Punkte

Betrachten Sie ein Potential der Form

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} , \quad V_0, \alpha > 0 \text{ mit } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f_k^{(B)}(\theta, \phi)$ in Bornscher Näherung.

b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung.

Aufgabe 5: — 8 Punkte

Betrachten Sie ein System mit einem Hamiltonoperator der Form

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & W_{12} \\ W_{21} & E_2 \end{pmatrix} ,$$

wobei W_{12} und W_{21} als kleine Störung betrachtet werden können. Die ungestörten Zustände seien

$$\phi_1 = (1,0)^T \text{ und } \phi_2 = (0,1)^T .$$

a) Welche Bedingungen müssen E_1, E_2, W_{12}, W_{21} erfüllen?

b) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E_+, E_- und die dazugehörigen Eigenzustände ψ_+, ψ_-.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $E_1 = E_2$, $W_{12} = W_{21}$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(0)\rangle = \phi_1 .$$

Bestimmen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ den Zustand ϕ_2 zu messen.