Moderne Theoretische Physik I – Klausur

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. S. Ertl

Datum: Freitag, 02.08.2013
Uhrzeit: 11:00 Uhr
Ort: Gerthsen-Hörsaal / Gaede-Hörsaal

Hinweise:
Die Klausur beinhaltet **4 Aufgaben** mit einer maximal erreichbaren Punkteanzahl von **30 Punkten**.
Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50% der Punkte (= 15 Punkte) erreicht wurden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden.
Erlaubte Hilfsmittel sind ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt und ein zweisprachiges Wörterbuch.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt (auch auf das Deckblatt). Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Erreichte Gesamtpunkte
Korrektor					
Punkte					

Aufgabe 1: 10 Punkte

(a) Geben Sie das allgemeine Kriterium für die *Linearität* eines Operators $\hat{O}$ an (welcher auf Wellenfunktionen $\psi(\vec{x})$ wirkt). (1 Punkt)

(b) Geben Sie das allgemeine Kriterium für die *Hermitezität* eines Operators $\hat{O}$ an (welcher auf Wellenfunktionen $\psi(\vec{x})$ wirkt). (1 Punkt)

(c) Untersuchen Sie die folgenden Operatoren auf Ihre Linearität und Hermitezität:

$$\hat{O}_1\psi(\vec{x}) = -i\hbar x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(\vec{x})\,,$$
$$\hat{O}_2\psi(\vec{x}) = \hbar x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(\vec{x})\,,$$
$$\hat{O}_3\psi(\vec{x}) = -i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}x_1\right)\psi(\vec{x})\,. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(d) Von nun an schreiben wir Operatoren ohne " ˆ ".
Wann nennen wir 2 Observablen A_1 und A_2 kompatibel? (1 Punkt)

(e) Zeigen Sie, daß

$$\left[\frac{1}{r}, L_i\right] = 0$$

Hinweis: Wie kann man sich die Inverse von r clever definieren? (2 Punkte)

(f) Berechnen Sie den Kommutator zwischen $\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ und $xp_y - yp_x$, wobei $\vec{r} = (x, y, z)$ der Orts- und $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ der Impulsoperator ist. (2 Punkte)

Aufgabe 2: 5 Punkte

Gegeben sei die folgende eindimensionale Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \exp\left(\frac{-ik^2t}{2m\hbar}\right)\left[A\exp\left(\frac{ikx}{\hbar}\right) + B\exp\left(-\frac{ikx}{\hbar}\right)\right]\,.$$

wobei $A, B \in \mathbb{C}$.
Bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(x,t)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 3: 8 Punkte

Ein eindimensionales Teilchen der Masse m befinde sich im Zustand

$$\psi(x,t) = A\,\exp\left(-a\left[\frac{mx^2}{\hbar} + it\right]\right)\,,$$

wobei A und a positive reelle Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie die Konstante A, sodass ψ auf Eins normiert ist. (1 Punkt)

(b) Für welche Funktion der potentiellen Energie $V(x)$ erfüllt ψ die Schrödingergleichung? (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p\rangle, \langle p^2\rangle$. (4 Punkte)

(d) Bestimmen Sie Δx und Δp. Ist das Produkt $(\Delta x)(\Delta p)$ konsistent mit der Unschärferelation? (2 Punkte)

Formelsammlung:

$$\int dx\;\exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Aufgabe 4: 7 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen, daß sich entlang der x-Achse im repulsiven Delta-Potential bewegt

$$V(x) = V_0\delta(x) \qquad\qquad (V_0 > 0)$$

(a) Wie lauten die Bedingungen an die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung an der singulären Stelle $x = 0$? (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die von links her einfallenden ungebundenen Lösungen. (3 Punkte)

(c) Berechnen Sie Reflexions-und Transmissionskoeffizienten als Funktion der Teilchenenergie. (2 Punkte)

(d) Gibt es gebundene Zustände? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)