Lösung zu Aufgabe 1

(a) Ein Operator $\hat{O}$ ist linear, wenn für alle quadratintegrablen Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\hat{O}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\hat{O}\psi_1 + \lambda_2\hat{O}\psi_2\,.$$

(b) Ein Operator $\hat{O}$ ist hermitesch, wenn für alle quadratintegrablen Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \psi_1^*(\vec{x})\hat{O}\psi_2(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\hat{O}\psi_1(\vec{x})\right]^* \psi_2(\vec{x})$$

(c) Alle 3 Operatoren sind linear, da sowohl die Multiplikation mit x_1 als auch die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1}$ linear sind und die Hintereinanderausführung von linearen Operatoren ebenfalls linear ist.
Es gilt allgemein für 2 Operatoren $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$. Ein Operator ist hermitesch genau dann, wenn $\hat{A}^\dagger = A$.
Aus der Hermitezität von $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$ folgt

$$\hat{O}_1^\dagger = \left(-i\hbar x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^\dagger = (\hat{x}_1\hat{p}_1)^\dagger = \hat{p}_1\hat{x}_1 \neq \hat{x}_1 p_1\,.$$

$\rightarrow \hat{O}_1$ ist also nicht hermitesch.

$$\hat{O}_2^\dagger = (i\hat{x}_1\hat{p}_1)^\dagger = (-i)\hat{p}_1\hat{x}_1 \neq i\hat{x}_1\hat{p}_1$$

$\rightarrow \hat{O}_2$ ist also nicht hermitesch.

Das symmetrische Produkt $\hat{O}_3 = \hat{x}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1$ ist hermitesch, weil $\hat{x}_1$ und $\hat{p}_1$ hermitesch sind.

Man kann die Hermitezität auch nachprüfen, indem man jeweils die Definition überprüft und bezüglich x_1 partiell integriert, wobei Randterme wegfallen, da die Funktionen quadratintegrable vorausgesetzt sind.

(d) Zwei Observablen A_1, A_2 werden kompatibel genannt, wenn gilt
$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 = 0$.

(e) Starten mit: $[I, L_i] = 0 \quad \rightarrow \quad [\frac{r}{r}, L_i] = 0$
Das impliziert

$$\left[\frac{1}{r}, L_i\right] = -\frac{1}{r}\,[r, L_i]\,\frac{1}{r}$$

und wir können ausrechnen:

$$[r, L_i] = \epsilon_{ijk}\,[r, r_jp_k] = \epsilon_{ijk}r_j[r, p_k] = i\hbar\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}r_jr_k = 0$$

(f)

$$\begin{aligned}
[\vec{p}^2, xp_y - yp_x] &= [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, xp_y - yp_x] \\
&= [p_x^2, x]p_y - [p_y^2, y]p_x \\
&= p_x[p_x, x]p_y + [p_x, x]p_xp_y - p_y[p_y, y]p_x - [p_y, y]p_yp_x \\
&= -2i\hbar p_xp_y - 2(-i\hbar)p_xp_y = 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

$$\psi(x,t) = e^{\frac{-ik^2t}{2m\hbar}} \left[Ae^{\frac{ikx}{\hbar}} + Be^{-\frac{ikx}{\hbar}} \right] .$$

Komplexe Konjugation von ψ liefert:

$$\psi^*(x,t) = e^{\frac{ik^2t}{2m\hbar}} \left[A^*e^{-\frac{ikx}{\hbar}} + B^*e^{\frac{ikx}{\hbar}} \right] .$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\begin{aligned}
j(x,t) &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \\
&= \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \left(A^*e^{-\frac{ikx}{\hbar}} + B^*e^{\frac{ikx}{\hbar}} \right) \left(\frac{ik}{\hbar} Ae^{\frac{ikx}{\hbar}} - \frac{ik}{\hbar} Be^{-\frac{ikx}{\hbar}} \right) - \left(-\frac{ik}{\hbar} A^*e^{-\frac{ikx}{\hbar}} + \frac{ik}{\hbar} B^*e^{\frac{ikx}{\hbar}} \right) \left(Ae^{\frac{ikx}{\hbar}} + Be^{-\frac{ikx}{\hbar}} \right) \right\} \\
&= \frac{k}{2m} \left[\left(|A|^2 - A^*Be^{-\frac{2ikx}{\hbar}} + AB^*e^{\frac{2ikx}{\hbar}} - |B|^2 \right) - \left(-|A|^2 - A^*Be^{-\frac{2ikx}{\hbar}} + AB^*e^{\frac{2ikx}{\hbar}} + |B|^2 \right) \right] \\
&= \frac{k}{m} \left(|A|^2 - |B|^2 \right)
\end{aligned}$$

Superposition zweier Teilchenströme in entgegengesetzter Richtung.

Lösung zu Aufgabe 3

(a)

$$1 = 2|A|^2 \int_0^\infty e^{-2amx^2/\hbar^2} dx = 2|A|^2 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}} \qquad \rightarrow \qquad A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -ia\psi \\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{2amx}{\hbar}\psi \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= -\frac{2am}{\hbar}\left(\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{2am}{\hbar}\left(1 - \frac{2amx^2}{\hbar}\right)\psi
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ einsetzen in die Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \\
\rightarrow \qquad V\psi &= i\hbar(-ia)\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2am}{\hbar}\right)\left(1 - \frac{2amx^2}{\hbar}\right)\psi \\
&= \left[\hbar a - \hbar a\left(1 - \frac{2amx^2}{\hbar}\right)\right]\psi = 2a^2mx^2\psi \\
\rightarrow \qquad V &= 2a^2mx^2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx = 0 \\
\langle x^2\rangle &= 2|A|^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2amx^2/\hbar} dx = 2|A|^2 \frac{1}{4\left(\frac{2am}{\hbar}\right)}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}} = \frac{\hbar}{4am} \\
\langle p\rangle &= m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = 0 \\
\langle p^2\rangle &= \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi = -\hbar^2 \int \psi^* \underbrace{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}_{-\frac{2am}{\hbar}\left(1-\frac{2amx^2}{\hbar}\right)\psi} dx \\
&= 2am\hbar\left[\int |\psi|^2 dx - \frac{2am}{\hbar}\int x^2|\psi|^2 dx\right] \\
&= 2am\hbar\left(1 - \frac{2am}{\hbar}\langle x^2\rangle\right) = 2am\hbar\left(1 - \frac{2am}{\hbar}\frac{\hbar}{4am}\right) \\
&= am\hbar
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{4am} \qquad \rightarrow \qquad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}} \\
(\Delta p)^2 &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = amh \qquad \rightarrow \qquad \Delta p = \sqrt{amh} \\
(\Delta x)(\Delta p) &= \sqrt{\frac{\hbar}{4am}\cdot am\hbar} = \frac{\hbar}{2} \qquad \rightarrow \qquad \text{ist also (gerade) erfüllt.}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Da erst die zweite Ableitung bei $x = 0$ eine δ-distributionsartige Singularität aufweist, kann die erste Abletiung höchstens einen endlichen Sprung aufweisen und die Wellenfunktion muß stetig sein.
Integriert man die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein infinitesimales Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$, erhält man die Randbedingungen für die Ableitung:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0) \tag{1}$$

Die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion selbst lautet

$$\psi(0^+) - \psi'(0^-) = 0 \tag{2}$$

(b) Für eine von links her einfallende Welle lautet die Lösung

$$\psi(x) = \left\{\begin{matrix} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \qquad x < 0 \\ e^{ikx} & \qquad x \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

Dabei wurde von der freien Wählbarkeit der Normierung dadurch Gebrauch gemacht, daß für $x \geq 0$ der Koeffizient 1 gesetzt wurde.
Die Koeffizienten A und B sind dann durch die Randbedingungen (1) und (2) eindeutig bestimmt.

Setzt man die Lösung dieser Bedingung ein, ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$ik(1 - A + B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \qquad\qquad A + B = 1$$

Auflösen nach A und B liefert

$$A = 1 - \frac{mV_0}{i\hbar^2 k}, \qquad\qquad B = \frac{mV_0}{i\hbar^2 k}$$

(c) Transmissions- und Reflexionskoeffizienten sind dann wegen $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$T = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{1 + \frac{mV_0^2}{2E\hbar^2}} = \frac{2E\hbar^2}{2E\hbar^2 + mV_0^2}$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{mV_0^2}{2E\hbar^2 + mV_0^2} = 1 - T$$

(d) Es gibt keine gebundenen Zustände, denn die Energie kann nicht negativ werden.
Für eine Energieeigenfunktion $\psi(x)$ gilt nämlich

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \underbrace{H\psi(x)}_{E\psi(x)} = E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(\frac{p^2}{2m} + V_0 \delta(x) \right) \psi(x)$$

Wegen der Hermitezität von p ist weiter

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2m} [p\psi(x)]^* [p\psi(x)] \right) + V_0 |\psi(0)|^2 > 0$$

d.h. es kann keine Energiewerte $E < 0$ und folglich auch keine gebundenen Zustände geben.

Es ist auch schon ausreichend zu argumentieren, daß das Potential $V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$ ein Grenzfall einer Potentialschwelle ist und nicht eines Potentialtopfes, so daß das Potential keine Mulde bildet in der das Teilchen "gefangen" werden könnte.