Moderne Theoretische Physik I – Klausur, 2. Termin

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. S. Ertl

Datum: Mittwoch, 25.09.2013
Uhrzeit: 11:00 Uhr
Ort: Gerthsen-Hörsaal

Hinweise:
Die Klausur beinhaltet **5 Aufgaben** mit einer maximal erreichbaren Punkteanzahl von **30 Punkten**.
Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50% der Punkte (= 15 Punkte) erreicht wurden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 2 Stunden.
Erlaubte Hilfsmittel sind ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt und ein zweisprachiges Wörterbuch.

Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt (auch auf das Deckblatt). Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Erreichte Gesamtpunkte
Korrektor						
Punkte						

Aufgabe 1: 5 Punkte

(a) Der Paritäts- oder Raumspiegelungsoperator P ist durch seine Wirkung auf eine eindimensionale Wellenfunktion folgendermaßen definiert

$$P\psi(x,t) = \psi(-x,t)$$

(i) Zeigen Sie, daß P linear und hermitesch ist. (2 Punkte)

(ii) Berechnen Sie P^2. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[O_1, O_2]$ für eine eindimensionale Wellenfunktion $\psi = \psi(x)$, wobei

$$O_1\psi = x^3\psi$$
$$O_2\psi = x\frac{d\psi}{dx}$$

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[\frac{1}{x}, p]$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen mit Masse m, welches sich in einem symmetrischen harmonischen Oszillatorpotential bewegt, lautet

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega^2}{2}|\vec{x}|^2$$

(a) Welche Symmetrien weist dieser Operator auf? (1 Punkt)

(b) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in geeignete Koordinaten, welche an diese Symmetrien angepaßt sind. (1 Punkt)

(c) In welcher Form können, hinsichtlich der Symmetrien, die Energieeigenfunktionen angegeben werden? (1 Punkt)

(d) Der Grundzustand ist durch folgende Wellenfunktion gegeben

$$\psi_0(\vec{x}) = \frac{1}{a^{3/2}\pi^{3/4}} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}\right) \qquad \text{mit} \qquad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Schreiben Sie diese Wellenfunktion in geeignete Koordinaten um, welche an die Symmetrien angepaßt sind. (1 Punkt)
Welche Werte für $\vec{l}^2$ und l_z können sich bei der Messung dieser Größen an einem Teilchen ergeben, wenn es sich in diesem Zustand befindet? (1 Punkt)

(e) Ein Zustand zum nächsthöheren Energieeigenwert lautet

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^{3/4}a^{5/2}}(x+iy)\exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2a^2}\right)$$

Welche Werte für $\vec{l}^2$ und l_z können sich jetzt ergeben? (1 Punkt)

Aufgabe 3: 7 Punkte

In effektiven Modellen für Streuprozesse (z.B. in der Kernphysik) werden komplexe Potentiale $V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - iV_2(\vec{x})$ verwendet, wobei $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$ und $V_2 > 0$ ist. In die Schrödingergleichung geht daher folgender Hamiltonoperator ein

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V_1(\vec{x}) - iV_2(\vec{x})$$

(a) Ist dieser Hamiltonoperator linear? Ist er hermitesch? (2 Punkt)

(b) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung der Wahrscheinlichkeit her. Was ändert sich gegenüber dem Fall rein reeller Potentiale? (4 Punkte)

(c) Was ergibt sich daraus für die Wahrscheinlichkeitsdichte? Interpretieren Sie ihr Resultat für den Fall $V_2 > 0$. (1 Punkte)

Aufgabe 4: 7 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, daß T hermitesch ist. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von T. (1 Punkt)

(c) Bestimmen und normalisieren Sie die Eigenvektoren. (2 Punkte)
(Bemerkung: Die Eigenvektoren sind orthogonal)

(d) Konstruieren Sie die unitäre Diagonalisierungsmatrix S und überprüfen Sie explizit, daß diese T diagonalisiert. (2 Punkte)
Hinweis: $(S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i$

(e) Überprüfen Sie, daß $\det(T)$ und $Tr(T)$ diesselben Ergebnisse liefern wie für die diagonalisierte Form. (1 Punkt)

Aufgabe 5: 5 Punkte

Ein Teilchen im unendlichen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad 0 \le x \le a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

hat die anfängliche Wellenfunktion

$$\psi(x,0) = \begin{cases} Ax(a-x) & \text{falls } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Normieren Sie $\psi(x,0)$ auf Eins. (1 Punkt)

(b) Skizieren Sie die Wellenfunktion. (1 Punkt)

(c) Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle H \rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$. (3 Punkte)

(d) Bonus: Ist es in dieser Aufgabe möglich $\langle p \rangle$ durch differenzieren nach der Zeit zu erhalten? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. (1 Punkt)

Formelsammlung:

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \qquad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{-i\varphi}, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$

$$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta\, e^{-2i\varphi}, \qquad Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta\, \cos\vartheta\, e^{-i\varphi}, \qquad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\vartheta - 1\right)$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta\, \cos\vartheta\, e^{i\varphi}, \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta\, e^{2i\varphi}$$