Lösung zu Aufgabe 1

(a) Linearität:

$$P\left[\lambda_1\psi_1(x) + \lambda_2\psi(x)\right] = \lambda_1\psi_1(-x) + \lambda_2\psi(-x) = \lambda_1 P\psi_1(x) + \lambda_2 P\psi_2(x)$$

Hermitezität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^*(x)P\psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^*(x)\psi_2(-x) \overset{x'=x}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_1^*(-x')\psi_2(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left[P\psi_1(x)\right]^*\psi_2(x)$$

Letzteres bedeutet, daß P hermitesch ist.

(b)

$$P^2\psi(x) = P\psi(-x) = \psi[-(-x)] = \psi(x) \qquad \to \qquad P^2 = 1$$

(c)

$$\begin{aligned}
[x^3, x\frac{d}{dx}]\psi &= x^3x\frac{d}{dx}\psi - x\frac{d}{dx}[x^3\psi] \\
&= x^3x\frac{d}{dx}\psi - x(\frac{d}{dx}x^3)\psi - xx^3\frac{d}{dx}\psi \\
&= -3xx^2\psi = -3x^3\psi \\
&\to [x^3, x\frac{d}{dx}] = -3x^3
\end{aligned}$$

(d) $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned}
[\frac{1}{x}, p]\psi = -i\hbar[\frac{1}{x}, \frac{d}{dx}]\psi = -i\hbar\frac{1}{x^2}\psi \\
\to [\frac{1}{x}, p] = -i\hbar\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

(a) H ist symmetrisch unter Drehungen um den Ursprung.
Bemerkung: Tatsächlich ist die Symmetrie des harmonischen Oszillators noch größer und die Energieeigenwerte sind entartet (ähnlich wie bei den wasserstoffartigen Atomen). die Symmetriegruppe ist die $U(3)$. Das erkennt man daran, daß der Hamiltonoperator in der Form

$$H = \sum_{i=1}^{3} a_i^\dagger a_i\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega\mathbb{1}$$

mit den Absteigeoperatoren

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_i + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_i$$

geschrieben werden kann.
Offensichtlich ändert sich nämlich H nicht, wenn man neue Absteigeoperatoren $a_i = \sum_{k=1}^{3} U_{ik}a_k$ verwendet, wenn (U_{jk}) eine beliebige unitäre $\mathbb{C}^{3\times3}$-Matrix ist.

(b) Geeignet Koordinaten sind also Kugelkoordinaten.
Der Hamiltonoperator in Kugelkoordinaten (in Ortsdarstellung) ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\vec{l}^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2}{2}r^2$$

mit $\vec{l}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$

(c) Die Energieeigenfunktionen können in der Form

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

dargestellt werden.

(d) In Kugelkoordinaten lautet der Grundzustand

$$\psi_0(\vec{x}) = \frac{1}{a^{3/2}\pi^{3/4}}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) = \frac{2}{a^{3/2}\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)Y_{00}(\theta,\phi)$$

$$\psi_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Demnach sind $\vec{l}^2$ und m beide mit Sicherheit 0.

(e) Der angegebene erste angeregte Zustand läßt sich in der Form bringen

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{a^{5/2}\pi^{3/4}}r\sin\theta\exp(i\phi)\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{a^{5/2}\sqrt{3}}r\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)Y_{11}(\theta,\phi)$$

Es ist also die Wellenfunktion eine Eigentfunktion von $\vec{l}^2$ zu $l = 1$, also zum Eigenwert $\vec{l}^2 = \hbar^2\,1\times(1+1) = 2\hbar^2$.
Gleichzeitig ist also die Eigenfunktion von l_z mit $m = 1$, d.h. zum Eigenwert $l_z = \hbar$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Der Operator H ist linear, aber wegen des Imaginärteils im Potential nicht hermitesch.

(b) Es gilt die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte und der Wahrscheinlichkeitsstrom sind

$$\rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$$
$$\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\hbar}{m}\Im\left[\psi^*(\vec{x},t)\vec{\nabla}_x\psi(\vec{x},t)\right] = \frac{i\hbar}{m}\Re\left[\psi^*(\vec{x},t)\vec{\nabla}_x\psi(\vec{x},t)\right] = \frac{\hbar}{2im}\{\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\}$$

Aus der Schrödingergleichung folgt:

$$\begin{aligned}\partial_t\rho(\vec{x},t) &= [\partial_t\psi^*(\vec{x},t)]\,\psi(\vec{x},t) + \psi^*(\vec{x},t)\partial_t\psi(\vec{x},t)\\ &= \frac{\hbar}{i}\{[-H\psi(\vec{x},t)]^*\,\psi(\vec{x},t) + \psi^*(\vec{x},t)H\psi(\vec{x},t)\}\\ &= \frac{2}{\hbar}\Im\left[\psi^*(\vec{x},t)H\psi(\vec{x},t)\right]\end{aligned}$$

Weiters ist

$$
\begin{aligned}
div\,\vec{j}(\vec{x},t) &= \Im\left[[\vec{\nabla}_{\vec{x}}\psi]^*[\nabla_{\vec{x}}\psi] + \psi^*(\vec{x},t)\Delta_{\vec{x}}\psi(\vec{x},t)\right] \\
&= -\frac{2}{\hbar}\Im\left[\psi^*(\vec{x},t)\frac{p^2}{2m}\psi(\vec{x},t)\right]
\end{aligned}
$$

Die beiden Gleichungen addiert ergibt

$$
\partial_t\rho(\vec{x},t) + div\,\vec{j}(\vec{x},t) = \frac{2}{\hbar}\Im\left[V(\vec{x})|\psi(\vec{x},t)|^2\right] = -\frac{2}{\hbar}V_2(\vec{x})\rho(\vec{x},t)
$$

Integriert man diese Gleichung über den ganzen Raum, fällt der Term mit $div\,\vec{j}$ wegen des Gaußschen Integralsatzes weg, weil die Wellenfunktion im Unendlichen verschwindet.
Es gilt also

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\rho(\vec{x},t) = -\frac{2}{\hbar}\langle V_2\rangle
$$

d.h. wegen des Imaginärteils im Potential ist die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht mehr erhalten wie bei einem hermiteschen Hamiltonoperator.

(c) Da wir $V_2 > 0$ vorausgesetzt haben, nimmt die Gesamtwahrscheinlichkeit mit der Zeit ab. Ein solcher Imaginärteil im Potential beschreibt also die Absorption von Teilchen.

Lösung zu Aufgabe 4

(a)

$$
T^\dagger = \tilde{T}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = T
$$

(b)

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & 0-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\lambda - 2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \qquad \alpha + (i-1)\beta = 2\alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha = (1-i)\beta \\
&|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\
&\rightarrow \qquad 2|\beta|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&a^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad \alpha + (1-i)\beta = -\alpha$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(1-i)\beta$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2|\beta|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{2}|\beta|^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i-1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Check:

$$a^{(1)\dagger} a^{(2)} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1+i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i-1) \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \checkmark$$

(d)

$$T_{diag} = STS^{-1}$$

Wissen: $(S^{-1})_{ij} = (a^{(j)})_i$

$$(S^{-1})_{11} = (a^{(1)})_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i)$$
$$(S^{-1})_{12} = (a^{(2)})_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)$$
$$(S^{-1})_{21} = (a^{(1)})_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$(S^{-1})_{22} = (a^{(2)})_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i & \frac{(i-1)}{\sqrt{2}} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S = (S^{-1})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ \frac{-i-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$STS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

(e)

$$Tr(T) = 1$$
$$\det(T) = -2$$
$$Tr(STS^{-1}) = 1 \quad \checkmark$$
$$\det(STS^{-1}) = -2 \quad \checkmark$$

Lösung zu Aufgabe 5

(a)

$$
\begin{aligned}
1 &= |A|^2 \int_0^a x^2(a-x)^2\,dx = \\
&= |A|^2 \left\{ a^2 \int_0^a x^2\,dx - 2a \int_0^a x^3\,dx + \int_0^a x^4\,dx \right\} \\
&= |A|^2 \left(a^2 \frac{a^3}{3} - 2a\frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} \right) \\
&= \frac{a^5}{30} |A|^2 \\
&\rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}
\end{aligned}
$$

(b)

(c)

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int x|\psi(x,0)|^2\,dx = \\
&= |A|^2 \int_0^a x^3(a-x)^2 dx \\
&= |A|^2 \left\{ a^2 \int_0^a x^3 dx - 2a \int_0^a x^4 dx + \int_0^a x^5 dx \right\} \\
&= |A|^2 \left(a^2 \frac{a^4}{4} - 2a\frac{a^5}{5} + \frac{a^6}{6} \right) \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \psi\,dx = \\
&= \frac{\hbar}{i} |A|^2 \int_0^a x(a-x)(a-2x) dx \\
&= -i\hbar |A|^2 \int_0^a \left\{ a^2 \int_0^a x dx - 3a \int_0^a x^2 dx + 2 \int_0^a x^3 dx \right\} \\
&= -i\hbar |A|^2 \left(a^2 \frac{a^2}{2} - 3a\frac{a^3}{3} + 2\frac{a^4}{4} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int \psi^*\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi\,dx = \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}|A|^2\int_0^a x(a-x)(-2)dx \\
&= \frac{\hbar^2}{m}|A|^2\left\{a\int_0^a xdx - \int_0^a x^2dx\right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{m}|A|^2\left(a\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{5\hbar^2}{ma^2}
\end{aligned}
$$

(d) Bonus: Normalerweise ist es möglich $\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle$ zu rechnen. Allerdings wissen wir hier $\langle x\rangle$ nur zu einem einzigen Zeitpunkt. Daher ist es in dieser Aufgabe nicht möglich $\langle p\rangle$ durch Differenzieren zu erhalten.