1. Warm-Up (10 Punkte)

(a) **Translation** [2 Punkte]

Zeigen Sie, dass der Zustand $|\phi\rangle = e^{iPa/\hbar}|\psi\rangle$ dem um die Distanz a verschobenen Zustand $|\psi\rangle$ entspricht, d.h. $\phi(x) = \psi(x+a)$, wobei P der Impulsoperator ist.

(b) **Harmonischer Oszillator** [3 Punkte]

Zeigen Sie, dass

$$e^{-i\alpha N} a^\dagger e^{i\alpha N} = e^{-i\alpha} a^\dagger, \tag{1}$$

wobei $a^\dagger$ und a die Auf- und Absteiger des harmonischen Oszillators sind mit $[a, a^\dagger] = 1$ und $N = a^\dagger a$.

[Hinweis: Wenden Sie die linke und rechte Seite von (1) auf einen allgemeinen Zustand $|\phi\rangle = \sum_n b_n |n\rangle$ an, wobei $N|n\rangle = n|n\rangle$ und $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.]

(c) **Bloch-Gleichungen** [3 Punkte]

Wir betrachten ein Teilchen mit magnetischem Moment $\boldsymbol{M} = \gamma \boldsymbol{L}$ im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$,

$$H = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Kommutatorrelationen für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$, dass der Erwartungswert $\langle \boldsymbol{M} \rangle$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{M} \rangle = \gamma \langle \boldsymbol{M} \rangle \times \boldsymbol{B}$$

erfüllt [Hinweis: $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.]

(d) **Stark-Effekt** [2 Punkte]

Ein Zwei-Zustands-System mit Basiszuständen $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ koppelt an ein klassisches elektromagnetischens Feld $\mathcal{E}$. Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

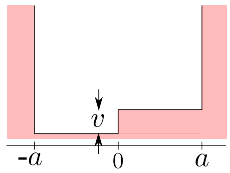
$$\begin{pmatrix} \langle \psi_+|H|\psi_+\rangle & \langle \psi_+|H|\psi_-\rangle \\ \langle \psi_-|H|\psi_+\rangle & \langle \psi_-|H|\psi_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_+ & \alpha\mathcal{E} \\ (\alpha\mathcal{E})^* & E_- \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dessen Eigenenergien und diskutieren Sie den Limes $|\alpha\mathcal{E}| \gg |E_- - E_+|$ und $|\alpha\mathcal{E}| \ll |E_- - E_+|$.

[Hinweis: $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots, \qquad (x \ll 1)$.]

2. Potenzial-Topf (5 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen in einem eindimensionalen Potenzialtopf



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq -a \\ v\,\theta(x) & -a < x \leq a \\ \infty & a < x \end{cases},$$

wobei $\theta(x)$ die Heaviside-Theta-Funktion ist.

(a) [2 Punkte] Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion in den Teilbereichen $-a < x \leq 0$ und $0 < x \leq a$, der gleichzeitig die Stetigkeitsbedingung bei $x = \pm a$ erfüllt.

(b) [3 Punkte] Zeigen Sie mit den Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$, dass die Eigenenergien bestimmt werden durch die tranzendente Gleichung

$$q \tan(ka) = -k \tan(qa),$$

wobei $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ und $q = \sqrt{2m(E-v)/\hbar^2}$.

3. Harmonischer Oszillator (7 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2, \quad \text{mit} \quad [X, P] = i\hbar.$$

Wir definieren die Auf- und Absteiger entsprechend, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P$ und $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P$. Zur Zeit $t = 0$ sei das System initialisiert im Zustand

$$|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n+2\rangle),$$

wobei $|n\rangle$ die Eigenzustände des Hamilton-Operators sind, d.h. $H|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$.

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie $|\phi(t)\rangle$ für beliebige Zeiten t und berechnen Sie damit den Erwartungswert $\langle H\rangle$, wobei $\langle\cdot\rangle = \langle\phi(t)|\cdot|\phi(t)\rangle$.

(b) [5 Punkte] Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit von ΔX^2, wobei $\Delta X^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$.

[Hinweis: Drücken Sie dazu X und X^2 durch a und $a^\dagger$ aus, wobei $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ und $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$.]

4. Spin-$\frac{1}{2}$ (7 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton-Operator eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems,

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

in der Eigen-Basis von σ_z, d.h. $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Zur Zeit $t = 0$ präparieren wir den Zustand

$$|\phi(0)\rangle = |\uparrow\rangle . \tag{3}$$

(a) [3 Punkte] Zur Zeit $t = 0$ wird H gemessen. Welche Werte E werden mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(E)$ gemessen?

(b) [4 Punkte] Wieder wird der Zustand (3) zum Zeitpunkt $t = 0$ initialisiert und zu einem späteren Zeitpunkt τ die Observable $A = \sigma_z$ gemessen. Welche Werte a werden mit welcher Wahrscheinlichkeiten $P(a)$ gemessen?

5. Dreiatomiges Molekül (6 Punkte)

Wir betrachten ein Elektron in einem Molekül, das aus drei Atomen A, B, C besteht. Die um die drei Kerne lokalisierten (orthonormalen) Wellenfunktionen bezeichnen wir entsprechend mit $|\varphi_a\rangle$, $|\varphi_b\rangle$ und $|\varphi_c\rangle$. Vernachlässigt man zunächst die Möglichkeit, dass das Elektron von einem Atom zum anderen hüpfen kann, so wird das System durch einen Hamilton-Operator H_0 beschrieben, für den gilt $H_0 |\varphi_i\rangle = E_0 |\varphi_i\rangle$ $(i = a, b, c)$. Nun werden die Atome durch einen zusätzlichen Operator V gekoppelt,

$$\begin{aligned} V|\varphi_a\rangle &= t|\varphi_b\rangle + t|\varphi_c\rangle \\ V|\varphi_b\rangle &= t|\varphi_a\rangle + t|\varphi_c\rangle \\ V|\varphi_c\rangle &= t|\varphi_a\rangle + t|\varphi_b\rangle \end{aligned}$$

(a) [1 Punkt] Schreiben Sie $H = H_0 + V$ als 3×3-Matrix in der Basis $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, |\varphi_c\rangle\}$.

(b) [2 Punkte] Wir definieren den Operator

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie T^2 und T^3 und drücken Sie H durch die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$, T und T^2 aus.

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von T gleichzeitig Eigenvektoren von H sind.

(d) [2 Punkte] Zeigen Sie mit Hilfe von (b) und (c), dass die Eigenwerte von H gegeben sind durch $E_0 + 2t\cos(2\pi n/3)$ mit $n = 0, 1, 2$.