Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

1. Klausur zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Matthias Hecker, Markus Klug

31.07.2017

1. Warm-Up (25 Punkte)

Bitte geben Sie knappe Antworten zu den folgenden Teilaufgaben.

(a) (3 Punkte) Wie lautet das Resultat des Kommutators $[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta]$ mit $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$. Was folgt daraus für Messungen von Ort und Impuls?

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass selbstadjungierte, bzw. hermitesche Operatoren rein reelle Eigenwerte besitzen.

(c) (3 Punkte) Wie lautet der de-Broglie-Zusammenhang zwischen Energie und Frequenz, sowie zwischen Impuls- und Wellenvektor ? Verwenden Sie den letztgenannten Zusammenhang, um eine Verbindung zwischen Energie und Wellenvektor für ein freies, nicht-relativistisches Teilchen herzuleiten.

(d) (5 Punkte) Für eine physikalische Observable $\hat{A}$ gelte die Vertauschungsrelation $[\hat{H}, \hat{A}] = i\epsilon\hat{A}$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Zeitentwicklung des Erwartungswertes $\langle\hat{A}\rangle(t)$? Nehmen Sie an, dass der Operator $\hat{A}$ keine explizite Zeitabhängigkeit hat und, dass $\langle\hat{A}\rangle(t = 0) = A_0$.

(e) (4 Punkte) Für eine physikalische Observable $\hat{B}$ gelte $[\hat{H}, \hat{B}] = 0$. Nennen Sie zwei Konsequenzen dieser Eigenschaft.

(f) (6 Punkte) Welche der folgenden Störungen heben die Entartung der Zustände des Wasserstoffproblems teilweise auf? Geben Sie eine kurze Begründung an.

(i) $\hat{H}'_1 = (\alpha\vec{S} + \beta\vec{L}) \cdot \vec{B}$

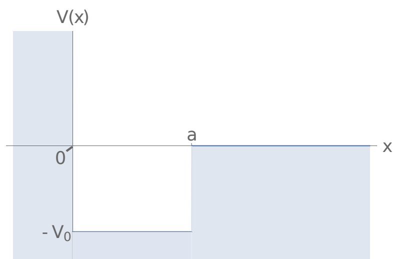
(ii) $\hat{H}'_2 = \gamma\,\hat{r}^{-1}$

(iii) $\hat{H}'_3 = \lambda\,\hat{x}$

Hier sind $\vec{L}$ und $\vec{S}$ jeweils Spin- Bahndrehimpulsoperatoren, $\hat{x}$ die x-Komponente des Ortsoperators, sowie $\hat{r} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}$ dessen radiale Komponente. α, β, γ und λ seien reelle Konstanten.

2. Halb-unendlicher Potentialtopf (25 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in einem 1D halb-unendlichem Potentialtopf (siehe Abbildung)



$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} ,$$

mit $V_0 > 0$.

(a) (9 Punkte) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für gebundene Zustände in den verschiedenen Bereichen.

(b) (9 Punkte) Nutzen Sie die Anschlussbedingungen an den Intervallgrenzen um eine Bedingung für die Energien gebundener Zustände herzuleiten. Bringen Sie diese auf die Form

$$\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{\tilde{V}_0 - \xi^2}}$$

Wie lauten ξ und $\tilde{V}_0$ ausgedrückt durch gegebene Parameter?

(c) (7 Punkte) Welche Bedingung müssen V_0 und a erfüllen, damit es mindestens einen gebundenen Zustand gibt?

3. Harmonischer Oszillator mit Delta-Störung (25 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, gegeben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) ,$$

mit den Eigenfunktionen $|n\rangle$. Betrachten Sie nun zusätzlich das Störpotential

$$\hat{H}' = 8\,\gamma\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}\;\delta(\hat{x})\ , \quad \text{wobei} \quad \gamma > 0\ .$$

(Beachten Sie, dass Teilaufgabe (b), (c) und (d) bearbeitet werden kann, auch wenn Teilaufgabe (a) nicht gelöst wurde.)

(a) (7 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Matrixelemente $\langle l|\hat{H}'|n\rangle$ gilt

$$\langle l|\hat{H}'|n\rangle = 8\gamma\,\frac{(-1)^{\frac{n+l}{2}}\sqrt{n!\,l!}}{2^{\frac{n+l}{2}}\,(\frac{n}{2})!\,(\frac{l}{2})!} \times \begin{cases} 1, & n\,\text{und}\,l\ \text{gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Hinweis: Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $H_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{(\frac{n}{2})!}$ für gerades n und $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie.

(c) (6 Punkte) Wie lautet der in erste Ordnung Störungstheorie korrigierte Grundzustand $|\tilde{0}\rangle$? Berechnen Sie ebenfalls den korrigierten ersten angeregten Zustand $|\tilde{1}\rangle$.
Hinweis: Berücksichtigen Sie hierbei nur Beiträge nächster und übernächster Energieniveaus.

(d) (6 Punkte) Geben Sie den Zustand $\tilde{\psi}_0(x) = \langle x|\tilde{0}\rangle$ explizit im Ortsraum an, und skizzieren Sie die Zustände $\tilde{\psi}_0(x)$ und $\psi_0(x)$ im gleichen Koordinatensystem.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Krümmung von $\tilde{\psi}_0(x)$ bei $x = 0$ positiv ist.

4. Spin im Magnetfeld (25 Punkte)

Ein Spin im Magnetfeld wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \mu\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{B}$$

beschrieben. Das Magnetfeld sei durch $\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ gegeben.
(*Sie können den Rest der Aufgabe bearbeiten, auch wenn Sie Teilaufgabe (a) nicht berechnet haben.*)

(a) (10 Punkte) Wie lauten die Eigenenergien und Eigenzustände im $|\uparrow\rangle$,$|\downarrow\rangle$-Zustandsraum des $\hat{\sigma}_z$-Spinoperators ?

(b) (8 Punkte) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das System im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ präpariert. Bestimmen Sie die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$.

(c) (7 Punkte) Zum Zeitpunkt t wird $\hat{\sigma}_z$ gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Eigenwert $+1$ gemessen?

Formelsammlung

Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\,\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}\,t} = \mathbb{1}\,\cos(|\vec{\omega}|\,t) + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\,\sin(|\vec{\omega}|\,t)$$

Allgemein

$$\begin{aligned} \text{Hamilton-Operator:} \quad & \hat{H} &&= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}) \\ \text{Impuls-Operator:} \quad & \hat{\mathbf{p}} &&= -i\hbar\nabla \\ \text{Zeitentwicklungs-Operator:} \quad & \hat{U} &&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t\right) \\ \text{Ehrenfest-Theorem:} \quad & \frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} &&= \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle \end{aligned}$$

Harmonischer Oszillator

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

mit Auf- und Absteigeoperatoren bzw. Orts- und Impulsoperatoren definiert als

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right], \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right], \qquad \text{wobei} \quad \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$$

$$\text{bzw.} \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\,, \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\,.$$

Die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren ist definiert als

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \qquad n = \{0,1,2,...\}\,.$$

Die Eigenenergien lauten $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ mit den Eigenfunktionen $|n\rangle$ bzw.

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}})\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\,,$$

wobei die ersten Hermite-Polynome lauten

$$H_0(\xi) = 1\,, \qquad H_1(\xi) = 2\xi\,, \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2\,, \qquad H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi\,.$$

Störungstheorie

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \langle n|\hat{H}'|n\rangle + \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\hat{H}'|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \\ |\tilde{n}\rangle &= |n\rangle + \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|\hat{H}'|n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,|m\rangle \end{aligned}$$