Moderne Theoretische Physik I — Quantenmechanik I

KIT, SS 2020

31. Juli 2020

Dozenten

Prof.: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner
Übungen: Dr. S. Liebler/PD Dr. S. Gieseke

Verwendete Formeln der Formelsammlung

Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Orts– und Impulsoperator des harmonischen Oszillators:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger).$$

Leiteroperatoren auf Drehimpulseigenzustände:

$$J_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|jm\pm 1\rangle.$$

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\sin\theta)e^{\pm i\phi}.$$

Aufgabe 1: Teilchen in einer Dimension

Ein Teilchen in einer Dimension x und einem Potential $V(x)$ habe orthonormierte Ortswellenfunktionen $\psi_n(x)$ zu Energieeigenwerten E_n, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_i^*(x)\psi_j(x) = \delta_{ij}.$$

Zur Zeit $t = 0$ lautet die Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x)).$$

Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle x\rangle(t)$ zu beliebigen Zeiten $t > 0$.

Aufgabe 2: Einfacher Harmonischer Oszillator

Ein einfacher harmonischer Oszillator in einer Raumdimension x wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Oszillator im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle.$$

Darin sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ Eigenzustände des Besetzungszahloperators $N = a^\dagger a$ zu den Eigenwerten n = 1, 2.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E\rangle$ der Energie des Oszillators bei $t = 0$.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ erneut im Zustand $|\psi(0)\rangle$ befindet.

(c) Wie lautet der Erwartungswert $\langle x\rangle(t)$ der Ortsmessung zu beliebigen Zeiten $t > 0$?

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator im Kraftfeld

Der Oszillator aus Aufgabe 2 befinde sich nun in einem homogenen Kraftfeld der Kraft k, so dass der Hamiltonoperator nun lautet:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - kX.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator nun mit Hilfe der durch eine konstante Zahl c modifizierten Leiteroperatoren

$$b^\dagger = a^\dagger + c^* \qquad b = a + c$$

diagonalisiert werden kann. Bestimmen Sie c.

(b) In welchem Zustand $|\psi(t)\rangle$ befindet sich das System nun zu Zeiten $t > 0$, wenn es bei $t = 0$ im gleichen Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$ war?

(c) Wie lautet der Ortserwartungswert $\langle x\rangle(t)$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$? Was bedeutet das physikalisch?

Aufgabe 4: Wasserstoffatom

Ein einfaches Wasserstoffatom hat die Eigenzustände $|n\ell m\rangle$ mit den üblichen Quantenzahlen. Es befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = a|1s0\rangle + b|2p1\rangle + c|2p-1\rangle$$

mit reellen Parametern a, b, c. Die Grundzustandsenergie ist E_0.
(a) Bestimmen Sie a, b, c so, dass $\langle L_z\rangle = -\hbar/6$ und $\langle E\rangle = 3E_0/8$.
(b) Wie lautet der Erwartungswert der x-Komponente des Bahndrehimpulses, $\langle L_x\rangle$?
(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle x\rangle$ der x-Koordinate des Elektrons. Hinweis: Bezeichnen Sie ein Radialintegral mit R anstatt es zu berechnen.