Klausur: Moderne Theoretische Physik I - Quantenmechanik I Nr.2

KIT, SS 2020

5. Oktober 2020

Dozenten

Prof.: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner
Übungen: Dr. S. Liebler/PD Dr. S. Gieseke

Verwendete Formeln der Formelsammlung

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Orts- und Impulsoperator des harmonischen Oszillators:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger).$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Kurze Fragen

(a) Wie lautet die Vertauschungsrelation von Ort und Impuls?

(b) Geben Sie die Pauli-Matrizen und deren Vertauschungsrelationen an.

(c) Nennen Sie je ein Beispiel zum Wellen- und zum Teilchencharakter in der Quantenphysik.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine Korrespondenzregel.

(e) Was versteht man unter der Symmetrisierungsregel? Geben Sie ein Beispiel.

Aufgabe 2: Wasserstoffatom

Ein einfaches Wasserstoffatom hat die Eigenzustände $|n\ell m\rangle$ mit den üblichen Quantenzahlen. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Atom im Zustand

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + b\sum_{\ell,m}|2\ell m\rangle,$$

wobei über alle möglichen ℓ, m summiert wird.

(a) Man macht zur Zeit $t = 0$ eine Energie- und Drehimpulsmessung. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden

(1) die Energie des ersten angeregten Niveaus,

(2) der Drehimpuls $\ell = 1$,

(1) die magnetische Quantenzahl $m = 0$

gemessen? Geben Sie als Ergebnisse der Rechnungen jeweils Zahlenwerte an.

(b) Wie lautet der Zustand ψ_0 zur Zeit $t > 0$? Wie hängen die in (a) berechneten Wahrscheinlichkeiten von der Zeit ab?

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator

Ein einfacher harmonischer Oszillator in einer Raumdimension x wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Oszillator im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |4\rangle).$$

Darin sind $|0\rangle$, $|4\rangle$ Eigenzustände des Besetzungszahloperators $N = a^\dagger a$ zu den Eigenwerten $n = 0, 4$.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle$, X^2, $\langle P\rangle$, P^2 und verifizieren Sie die Heisenbergsche Unsicherheitsrelation.

(b) Wie entwickelt sich der Zustand $|\psi(0)\rangle$ mit der Zeit? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ erneut im Zustand $|\psi(0)\rangle$ befindet.

Aufgabe 4: Teilchen im Potential

Wir untersuchen ein eindimensionales System mit einem Teilchen der Masse m im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Wie lauten die zeitunabhängige Schrödingergleichung sowie die Rand- und Normierungsbedingungen für eine Lösung $\psi(x)$?

(b) Wie lauten die Energieeigenwerte und die dazugehörigen, normierten Eigenfunktionen $\psi(x)$?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich ein Teilchen im Grundzustand im klassisch verbotenen Bereich?

Hinweis: die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ des einfachen harmonischen Oszillators können als bekannt angenommen und sollen nicht explizit ausgeschrieben werden.

Aufgabe 5: Teilchen im Kasten

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Kastenpotential der Breite a, dessen Wände unendlich hoch sind $(0 < x < a)$.

(a) Wie lauten die Energien E_n und die stationären Zustände $\psi_n(x)$ des Teilchens mit einer Quantenzahl n? Welche n sind erlaubt?

(b) Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi_0\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$$

worin $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die beiden niedrigsten Energieeigenzustände sind.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird zur Zeit $t = 0$ die Energie E_2 gemessen?

(ii) In welchem Zustand befindet sich das Teilchen zu einer Zeit $t_1 > 0$, wenn bei $t = 0$ tatsächlich die Energie E_2 gemessen wurde?

(iii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen bei $t = 0$ in einem kleinen Bereich $\delta a \ll a$ um $x = a/2$?