

Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 2022Prof. Dr. A. Shnirman
Adrian Reich**Klausur Nr. 1**
02.08.2022**1. Kurzfragen****(20 Punkte)**

Die folgenden Fragen können alle unabhängig voneinander in jeweils wenigen Zeilen beantwortet werden.

- Ein Teilchen in einer Dimension werde beschrieben durch die Wellenfunktion $\psi(x)$. Wie lässt sich daraus der Erwartungswert des Ortes berechnen? Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Messung im Intervall $x \in [a, b]$ zu finden? (3 Punkte)
- Es sei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Zeigen Sie, dass die Eigenzustände im nicht-entarteten Fall orthogonal zueinander sind. (3 Punkte)
- Es sei $\hat{A}$ eine physikalische Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängt und mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ kommutiert, $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ eine Erhaltungsgröße ist. (4 Punkte)
- Zeigen Sie, dass $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$, wobei $\hat{\mathbf{L}}$ der Drehimpulsoperator ist. Sie dürfen das Ergebnis des Kommutators $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ mit $i, j \in \{x, y, z\}$ als bekannt voraussetzen. (5 Punkte)
- Wir betrachten die Zustände im $3d$ -Unterraum des Wasserstoffatoms ($n = 3, l = 2$), die (inklusive Spin-Freiheitsgrad) 10-fach entartet sind. Berücksichtigt man die Spin-Bahn-Kopplung in erster Ordnung Störungstheorie, wird die Entartung teilweise aufgehoben. Auf wie viele verschiedene Energien teilen sich die Zustände dieses Unterraums auf und wie hoch ist jeweils die verbleibende Entartung? (5 Punkte)

2. Halbunendlicher Potentialtopf**(20 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse m in einer Dimension im Potential eines halbunendlichen Potentialtopfes

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases} \quad (1)$$

wobei $V_0, a > 0$. Wir interessieren uns hier lediglich für die gebundenen Zustände.

- Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für gebundene Zustände in den einzelnen Bereichen (zunächst ohne die Randbedingungen zu beachten). (6 Punkte)
- Nutzen Sie nun die Randbedingungen, die die Wellenfunktion und ihre Ableitung an den Intervallgrenzen erfüllen müssen, um eine Bedingung für die Energien gebundener Zustände herzuleiten. Bringen Sie diese auf die Form

$$-\cot(\chi) = \frac{\sqrt{U - \chi^2}}{\chi}, \quad (2)$$

wobei χ/a die Wellenzahl im Bereich $0 < x < a$ ist. Geben Sie U ausgedrückt durch gegebene Parameter an. (8 Punkte)

- c) Welche Bedingung müssen V_0 und a bzw. U erfüllen, damit es mindestens einen gebundenen Zustand gibt? (4 Punkte)
- d) Wie lässt sich erklären, dass es im endlichen Potentialtopf $V(x) = V_0 [\theta(-x) + \theta(x - 2a)]$ immer mindestens eine Lösung gibt, hier aber nicht? (2 Punkte)

3. 2D harmonischer Oszillator - Störungstheorie (20 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m in einem zweidimensionalen harmonischen Oszillator ist gegeben durch

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2). \quad (3)$$

- a) Nutzen Sie aus, dass das Problem für beide Raumrichtungen individuell gelöst werden kann und bestimmen Sie so alle Energieeigenwerte E_N , $N = 0, 1, 2, \dots$, von $\hat{H}_0$ und die zugehörigen Entartungsgrade, indem Sie passende Auf- und Absteigeoperatoren definieren. Sie dürfen dabei alles, was sie über den eindimensionalen Fall wissen, als bekannt voraussetzen. (8 Punkte)
- b) Das Teilchen im harmonischen Oszillator trage eine elektrische Ladung q und wir legen ein schwaches äußeres Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ an. Zeigen Sie in einer Eichung mit $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, wobei $\mathbf{A}$ das Vektorpotential sei mit $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, dass der Hamiltonoperator unter Vernachlässigung des diamagnetischen Terms geschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{qB}{2m}\hat{L}_z, \quad (4)$$

mit der z -Komponente des Drehimpulsoperators $\hat{L}_z$. (4 Punkte)

- c) Betrachten Sie den zweiten Term in (4) als Störung und bestimmen Sie die Energiekorrekturen zum ersten angeregten Niveau ($N = 1$) in erster Ordnung Störungstheorie. Wird die Entartung aufgehoben? (8 Punkte)

Hinweis: Drücken Sie $\hat{L}_z$ durch Auf- und Absteigeoperatoren aus. Berechnen Sie damit die Störmatrix und diagonalisieren Sie diese.

Bonus: Lösen Sie Teilaufgabe c) auch für das zweite angeregte Niveau ($N = 2$). (5 Bonuspunkte)

4. Spin im Magnetfeld (20 Punkte)

Wir betrachten einen Spin- $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \mu \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} \quad (5)$$

mit den Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$. Das Magnetfeld sei dabei gegeben durch $\mathbf{B} = \frac{B}{2}(\sqrt{3}, 0, 1)^T$.

- a) Wie lauten die Eigenenergien und Eigenzustände von $\hat{H}$ ausgedrückt durch die Eigenzustände $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ von $\hat{\sigma}_z$? (8 Punkte)
- b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das System im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ präpariert. In welchem Zustand $|\psi(t)\rangle$ befindet sich das System nach einer Zeit t ? (6 Punkte)
- c) Zum Zeitpunkt $t = T$ wird eine Messung von $\hat{\sigma}_z$ durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautet das Messergebnis $+1$? Falls zum Zeitpunkt $t = 2T$ noch einmal $\hat{\sigma}_z$ gemessen wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir bei beiden Messungen den Wert $+1$? (6 Punkte)