Klausur: Quantenmechanik

Sommersemester 2023

A. Metelmann, S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie

Date: 22. September 2023

MATRIKELNUMMER: ....

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Gesamt
Punkte:					

NOTE: ....

Klausur: Quantenmechanik

Sommersemester 2023

A. Metelmann, S. Böhling, L. Orr, V. Stangier
Karlsruher Institut für Technologie
Date: 22. September 2023

Aufgabe 1. Warm up (9 Punkte)

(A) (1 Punkt) Nennen sie zwei Eigenschaften des Hilbertraums.

(B) (1,5 Punkte) Ein Teilchen in einem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

wird beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad \text{mit } n = 1, 2, 3, ...$$

Nehmen Sie an, dass das Teilchen sich im Grundzustand befindet. Was ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Bereich $0 < x < L/4$ zu finden?

(C) (1 Punkt) Zeigen Sie, welche der folgenden Größen normiert und hermitesch sind (oder nicht sind). Schließen Sie daraus, ob es sich um erlaubte Quantenzustände handelt.

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\rho}_B = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \text{ (in der } |n\rangle \text{ Basis)}$$

(D) (1,5 Punkte) Zeigen Sie, dass zwei kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ im Allgemeinen nicht orthogonal sind. Was passierte, wenn $|\alpha - \beta| \to \infty$?

(E) (1,5 Punkte) In einem System mit zwei Spins $s_1 = \frac{1}{2}$ und $s_2 = \frac{3}{2}$. Was sind die möglichen Werte für den Gesamtspin S und welche Werte kann die magnetische Quantenzahl M für jeden Wert S annehmen?

(F) (1 Punkt) Ein System wird beschrieben durch die folgende Superposition in der $|l\, m\rangle$ Basis:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|2\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\, -1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1\,1\rangle$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle$ und $\langle \hat{L}_z \rangle$.

(G) (1,5 Punkte) Ohne Energiekorrekturen wird das Wasserstoffatom beschrieben durch die Quantenzahlen n, l, m. Wie ist das Energiespektrum? Was ist der Entartungsgrad für jedes Energieniveau? Nennen Sie einen Mechanismus, durch den die Entartung (zumindest teilweise) aufgehoben werden kann.

Aufgabe 2: Störungstheorie in einem Spin-1/2-System (10 Punkte)

Wir betrachten ein Spin-1/2-Teilchen in einem magnetischen Feld $\mathbf{B} = B\mathbf{e_z}$. Der Hamiltonian für dieses System ist gegeben als

$$\hat{H}_0 = \frac{\mu_B \hbar B_z}{2} \sigma_z.$$

(A) (1 Punkt) Was sind die Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenzustände des Hamiltonian H_0?

Das System wird nun durch ein kleines Potential $\hat{V}$ entlang der x-Achse gestört. Das gesamte System inklusive Störungsterm wird nun beschrieben durch den Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad \text{wobei} \quad \hat{V} = \frac{\mu_B \hbar B_x}{2} \sigma_x \quad \text{und} \quad B_x \ll B_z.$$

(B) (4 Punkte) Berechnen Sie die 1. Ordnungs Korrekturterme der Eigenenergien und Eigenzuständen des originalen Hamiltonian $\hat{H}_0$ durch das Störpotential $\hat{V}$.

(C) (3 Punkte) Berechen Sie die Korrekturen 2. Ordnung zu den Eigenenergien.

Unter Vernachlässigung der Annahme $B_x \ll B_z$ kann der Spinhamiltonian geschrieben werden als

$$\hat{H}_S = \frac{\mu_B \hbar}{2} \left(B_z \sigma_z + B_x \sigma_x \right).$$

(D) (2 Punkte) Was sind die exakten Eigenenergien dieses Hamiltonian $\hat{H}_S$? Führen Sie eine Reihenentwicklung für $B_x/B_z \ll 1$ durch und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Störungsrechnung.

Aufgabe 3. Dichtematrix eines Zweizustandssystems (11 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei Observablen $\hat{A}$ and $\hat{B}$ in einem zweidimensionalen Hilbertraum. Die zwei Observablen haben die folgende Matrixdarstellung:

$$\hat{A} = \hbar \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ nicht gleichzeitig scharf messbar sind.

Wir nehmen an, dass das System sich in dem Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle \text{ wobei } |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befindet.

(B) (3 Punkte) Berechnen Sie die Dichtematrix dieses Systems. Berechnen Sie auch die Erwartungswerte $\langle \hat{A} \rangle$ und $\langle \hat{B} \rangle$.

(C) (4 Punkte) In der Basis

$$|\phi_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle$$
$$|\phi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |1\rangle$$

ist die Dichtematrix diagonal. Berechnen Sie ρ_ϕ, $\hat{A}_\phi$ und $\hat{B}_\phi$ in dieser Basis.

(D) (3 Punkte) Berechnen sie die Erwartungswarte $\langle \hat{A}_\phi \rangle$ and $\langle \hat{B}_\phi \rangle$ in der neuen Basis. Argumentieren Sie, warum sich die Standardabweichung $\sigma_O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$ eines Operators $\hat{O}$ bei der Basistransformation nicht ändert.

Aufgabe 4. Zeitentwicklung des Harmonischen Oszillators (10 Punkte)

In dieser Aufgabe arbeiten wir mit dem eindimensionalen Harmonischen Oszillator mit Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

mit Energieeigenzuständen $|n\rangle$.

(A) **(1 Punkt)** Was sind die Energieeigenwerte für diesen Hamiltonian?

(B) **(2 Punkte)** Im Folgenden nehmen wir an, dass sich das System zu $t = 0$ in der Superposition

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |2\rangle\right)$$

befindet. In welchem Zustand $|\psi(t)\rangle$ befindet sich das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t?

(C) **(2 Punkte)** Was ist die Wahrscheinlichkeit zu einer beliebigen Zeit t, dass das System sich wieder im Anfangszustand befindet? Wann ist diese Wahrscheinlichkeit 1? Wann ist sie 0?

(D) **(3 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie, $\hat{p}^2/2m$ zu einer beliebigen Zeit t. Berechnen Sie dann den Erwartungswert der potentiallen Energie, $m\omega^2\hat{x}^2/2$. (Hinweis: Drücken Sie diese Operatoren mit Auf- und Absteigeoperatoren aus).

(E) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert des Hamiltonian und zeigen Sie, dass dieser unabhängig von t ist.

Liste nützlicher Formeln:

- Unitäre Zeitentwicklung:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle \qquad \hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t) \qquad \hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

- Quantenharmonischer Oszillator

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$
$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad [\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$$

- Kohärente Zustände

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

- Pauli Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

- Drehimpuls:

$$\hat{L}_+\,|l\,m\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,|l\,m+1\rangle \qquad \hat{L}_-\,|l\,m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,|l\,m-1\rangle$$
$$\hat{L}_z\,|l\,m\rangle = \hbar m\,|l\,m\rangle \qquad \hat{\boldsymbol{L}}^2\,|l\,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\,|l\,m\rangle$$
$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \qquad \hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

- Nichtentartete Störungstheorie:

$$\hat{H}_0\,|\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}\,|\psi_n^{(0)}\rangle$$
$$E_n^{(m)} = \langle\psi_n^{(0)}|\hat{V}|\psi_n^{(m-1)}\rangle - \sum_{k=1}^{m-1} E_n^{(k)}\,\langle\psi_n^{(0)}|\psi_n^{(m-k)}\rangle$$
$$|\psi_n^{(1)}\rangle = -\sum_{n'\,(n'\neq n)}\frac{\langle\psi_{n'}^{(0)}|\hat{V}|\psi_n^{(0)}\rangle}{E_{n'}^{(0)} - E_n^{(0)}}\,|\psi_{n'}^{(0)}\rangle$$

- Matrixdiagonalisierung

$$D_A = S^{-1}AS$$

- Nützliche Reihenentwicklung:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \quad \text{for} \quad |x| < 1$$

- Nützliches Integral:

$$\int dy\,\sin^2(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\sin(2y)$$