Aufgabe 1 Studentische Lösung

Fehler sind nicht ausgeschlossen :D

A) • Vektorraum → Vollständigkeit

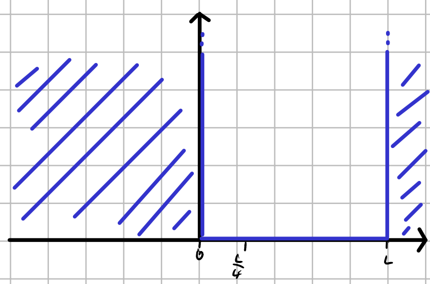
• Hat ein Skalarprodukt → Winkel und Längen sind definiert.

B) $P(0<x<\frac{L}{4}) = \int_0^{\frac{L}{4}} \varphi_1^*(x)\,\varphi_1(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{4}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$

$= \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx$

$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^{\frac{L}{4}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$




C) $\hat{\rho}_A$ ist nicht Normiert da $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_A) = \sqrt{2} \neq 1$

$\rho_A$ ist selbstadjungiert, da $\hat{\rho}_A = \rho_A^\dagger$, da $\hat{\rho}_{A\,1,2} = \rho_{A\,2,1}^*$

Folglich ist $\hat{\rho}_A$ kein erlaubter Quantenzustand.

$\hat{\rho}_B$ ist Normiert, da $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_B) = 1$

$\hat{\rho}_B$ ist nicht selbstadjungiert, da $\rho_B^\dagger = |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$

Folglich ist $\hat{\rho}_B$ kein erlaubter Quantenzustand.

D) $\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\beta^{*n}}{n!}\right| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\left|e^{\alpha\beta^*}\right| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} \neq 0$

$\lim_{|\alpha-\beta|\to\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ Ortogonalität im Grenzwert $|\alpha-\beta|\to\infty$

E) Quantenzahl: $s \in \{2, 1\} \Rightarrow \langle\hat{s}^2\rangle \in \{\hbar^2 6, \hbar^2 2\}$

Für $s=2$ folgt $M \in \{-2\hbar, -1\hbar, 0, 1\hbar, 2\hbar\}$

Für $s=1$ folgt $M \in \{-1\hbar, 0, 1\hbar\}$

F) $\langle\hat{L}^2\rangle = \frac{1}{6}\langle 20|\hat{L}^2|20\rangle + \frac{1}{3}\langle 1\,{-1}|\hat{L}^2|1\,{-1}\rangle + \frac{1}{2}\langle 11|\hat{L}^2|11\rangle$

$= \frac{1}{6}\langle 20|\hbar^2 2(2+1)|20\rangle + \frac{1}{3}\langle 1\,{-1}|\hbar^2 1(1+1)|1\,{-1}\rangle + \frac{1}{2}\langle 11|\hbar^2\, 1\cdot(1+1)|11\rangle$

$= \hbar^2\left(\frac{6}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{2}\right) = \frac{16}{6}\hbar^2$

$\langle\hat{L}_z\rangle = \frac{1}{6}\langle 20|\hat{L}_z|20\rangle + \frac{1}{3}\langle 1\,{-1}|\hat{L}_z|1\,{-1}\rangle + \frac{1}{2}\langle 11|\hat{L}_z|11\rangle$

$= \left(\frac{0}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\hbar = \frac{1}{6}\hbar$

g) Energiespektrum: $E = \frac{1}{n^2} R_\infty c h$, Entartungsgrad: $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$

z.B. die Spin-Bahn-Kopplung hebt die Entartung auf.

Aufgabe 2

A) $H_0 = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z \sigma_z = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \varphi_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $E_1^0 = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z$ und

$\varphi_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $E_2^0 = -\frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z$

B) $E_1^1 = \langle \varphi_1^0 | \hat{V} | \varphi_1^0 \rangle = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_x [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$E_2^1 = \langle \varphi_2^0 | \hat{V} | \varphi_2^0 \rangle = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_x [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$|\varphi_1^1\rangle = -\frac{\langle \varphi_2^0 | \hat{V} | \varphi_1^0 \rangle}{E_2^0 - E_1^0} |\varphi_2^0\rangle$ $\qquad$ $|\varphi_2^1\rangle = -\frac{\langle \varphi_1^0 | \hat{V} | \varphi_2^0 \rangle}{E_1^0 - E_2^0} |\varphi_1^0\rangle$

$\quad - \frac{\langle \varphi_2^0 | \hat{V} | \varphi_1^0 \rangle}{\mu_B \hbar B_z} |\varphi_2^0\rangle$ $\qquad$ $- \frac{\langle \varphi_1^0 | \hat{V} | \varphi_2^0 \rangle}{\mu_B \hbar B_z} |\varphi_1^0\rangle$

$\quad = \frac{1}{2}\frac{B_x}{B_z} |\varphi_2^0\rangle$ $\qquad$ $= -\frac{1}{2}\frac{B_x}{B_z} |\varphi_1^0\rangle$

C) $E_1^2 = \langle \varphi_1^0 | \hat{V} | \varphi_1^1 \rangle - E_1^1 \underbrace{\langle \varphi_1^0 | \varphi_1^1 \rangle}_{=0} = \frac{1}{2}\frac{B_x}{B_z} \langle \varphi_1^0 | \hat{V} | \varphi_2^0 \rangle = \frac{\mu_B \hbar}{4}\frac{B_x^2}{B_z}$

$E_2^2 = \langle \varphi_2^0 | \hat{V} | \varphi_2^1 \rangle - E_2^1 \underbrace{\langle \varphi_2^0 | \varphi_2^1 \rangle}_{=0} = -\frac{1}{2}\frac{B_x}{B_z} \langle \varphi_2^0 | \hat{V} | \varphi_1^0 \rangle = -\frac{\mu_B \hbar}{4}\frac{B_x^2}{B_z}$

D) $H_S = \frac{\mu_B \hbar}{2}(B_z \sigma_z + B_x \sigma_x) = \frac{\mu_B \hbar}{2} \begin{bmatrix} B_z & B_x \\ B_x & -B_z \end{bmatrix}$

$0 \overset{!}{=} |H_S - E \mathbb{1}| = \left(B_z - \frac{2}{\mu_B \hbar}E\right)\left(-B_z - \frac{2}{\mu_B \hbar}E\right) - B_x^2$

$= -B_z^2 + \left(\frac{2}{\mu_B \hbar}E\right)^2 - B_x^2$

$\Rightarrow E^2 = \left(\frac{\mu_B \hbar}{2}\right)^2 (B_z^2 + B_x^2)$

$\Rightarrow E = \pm \frac{\mu_B \hbar}{2}\sqrt{B_z^2 + B_x^2}$

Reihenentwicklung in $\frac{B_x^2}{B_z^2}$

$E = \pm \frac{\mu_B \hbar}{2} B_z \sqrt{1 + \frac{B_x^2}{B_z^2}} \approx \pm \frac{\mu_B \hbar}{2} B_z \left(1 + \frac{1}{2}\frac{B_x^2}{B_z^2} - \frac{1}{8}\frac{B_x^4}{B_z^4}\right)$

$E_1 = E_1^0 + E_1^1 + E_1^2 = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z + 0 + \frac{\mu_B \hbar}{4}\frac{B_x^2}{B_z} = \frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z \left(1 + \frac{1}{2}\frac{B_x^2}{B_z^2}\right)$

$E_2 = E_2^0 + E_2^1 + E_2^2 = -\frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z + 0 - \frac{\mu_B \hbar}{4}\frac{B_x^2}{B_z} = -\frac{1}{2}\mu_B \hbar B_z \left(1 + \frac{1}{2}\frac{B_x^2}{B_z^2}\right)$

$\Rightarrow$ übereinstimung bis zum $\sim B_x^2$ - Therm.

Aufgabe 3

A) $[\hat{A}, \hat{B}] = \hbar^2 \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \hbar^2 \left( \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) = \hbar^2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

B) $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\hat{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{A}) = Tr\left(\frac{1}{5}\hbar \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\hbar \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{9}{5}\hbar$

$\langle \hat{B} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{B} = Tr\left(\frac{1}{5}\hbar \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\hbar \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{13}{5}\hbar$

C) $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Diagonalisierungsmatrix $S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad S^{-1} = S^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\hat{\rho}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ da $|\varphi\rangle = |\phi_1\rangle$ bzw $\hat{\rho}_\phi = S^{-1}\hat{\rho}S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\hat{A}_\phi = S^{-1}\hat{A}S = \frac{\hbar}{5} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$\hat{B}_\phi = S^{-1}\hat{B}S = \frac{\hbar}{5} \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\langle \hat{A}_\phi \rangle = Tr_\phi(\rho_\phi A_\phi) = Tr_\phi \frac{\hbar}{5} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{9}{5}\hbar$

$\langle \hat{B}_\phi \rangle = Tr_\phi(\rho_\phi B_\phi) = Tr_\phi \frac{\hbar}{5} \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{13}{5}\hbar$

Die Basistransformation eines Zustands ist eine Unitäre Abbildung. also nur eine andere Darstellung des gleichen physikalischen Zustands. Folglich sollten sich dessen Eigenschaften, wie z.B $\sigma$ nicht verändern unter einem Basiswechsel, da Skalarprodukte unter unitären Transformationen erhalten sind.

Aufgabe 4

A) $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N} \qquad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$$\Rightarrow \quad E_n|n\rangle = \hat{H}|n\rangle = \hbar w(\hat{N} + \tfrac{1}{2})|n\rangle = \hbar w(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \hbar w(n+\tfrac{1}{2})$$

B) Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$

$$|\varphi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}|2\rangle\right)$$

c) $$P(|\psi(0)\rangle) = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\langle 0| + \langle 2|)\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}|2\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0} + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}\right)\right|^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0} + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}\right)\right)\left(\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}tE_0} + e^{\frac{i}{\hbar}tE_2}\right)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}e^{\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)} + \tfrac{1}{4}e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{E_0-E_2}{\hbar}t\right) \qquad E_0 - E_2 = 2\hbar w$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2wt)$$

$\Rightarrow P(|\psi(0)\rangle) = 1 \Leftrightarrow wt = m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow P(|\psi(0)\rangle) = 0 \Leftrightarrow wt = m\pi + \frac{\pi}{2}$ mit $m \in \mathbb{Z}$

D) $$\hat{p} = i\sqrt{\tfrac{\hbar m w}{2}}(a^\dagger - a) \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar w}{4}(a^\dagger - a)^2 = -\frac{\hbar w}{4}(a^\dagger a^\dagger + aa - a^\dagger a - aa^\dagger)$$

$$\langle m|\frac{\hat{p}^2}{2m}|n\rangle = -\frac{\hbar w}{4}\left(\langle m|a^\dagger a^\dagger|n\rangle + \langle m|a\,a|n\rangle - \underbrace{\langle m|a^\dagger a|n\rangle}_{=n\delta_{nm}} - \underbrace{\langle m|a\,a^\dagger|n\rangle}_{=(n+1)\delta_{nm}}\right)$$

$$= -\frac{\hbar w}{4}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m\,n+2} - \frac{\hbar w}{4}\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m\,n-2} + \frac{\hbar w}{4}(2n+1)\delta_{nm}$$

$$\langle\varphi(t)|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\varphi(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}tE_0}\langle 0| + e^{\frac{i}{\hbar}tE_2}\langle 2|\right)\frac{\hat{p}}{2m}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}|0\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}tE_2}|2\rangle\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\langle 0|\tfrac{p^2}{2m}|0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle 2|\tfrac{p^2}{2m}|2\rangle + \tfrac{1}{2}e^{\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\langle 0|\tfrac{p^2}{2m}|2\rangle + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\langle 2|\tfrac{p^2}{2m}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar w}{4} + \frac{1}{2}\frac{\hbar w}{4}5 - \frac{1}{2}e^{\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\frac{\hbar w}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{4}\hbar w - \frac{\hbar w}{4}\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{\hbar}(E_0-E_2)t\right)$$

$$= \frac{3}{4}\hbar w - \frac{\hbar w}{4}\sqrt{2}\cos(2wt)$$

Analoge Rechnung für $\hat{x}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \Rightarrow \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \frac{\omega\hbar}{4}(a^\dagger + a)^2 = \frac{\hbar\omega}{4}(a^\dagger a^\dagger + aa + a^\dagger a + aa^\dagger)$$

$$\langle m|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\Big(\langle m|a^\dagger a^\dagger|n\rangle + \langle m|a\,a\,|n\rangle + \underbrace{\langle m|a^\dagger a\,|n\rangle}_{=n\delta_{nm}} + \underbrace{\langle m|a\,a^\dagger|n\rangle}_{=(n+1)\delta_{nm}}\Big)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{m\,n+2} + \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{m\,n-2} + \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)\delta_{nm}$$

$$\langle\varphi(t)|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}tE_0}\langle 0| + e^{\frac{i}{\hbar}tE_2}\langle 2|\right)\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}|2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\langle 0|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 2|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}e^{\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\langle 0|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\langle 2|\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{4} + \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{4}5 + \frac{1}{2}e^{\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_0-E_2)}\sqrt{6}\frac{\hbar\omega}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{\hbar}(E_0-E_2)t)$$

$$= \frac{3}{4}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{2}\cos(2\omega t)$$

E) $\langle H\rangle = \langle\frac{\hat{p}^2}{2m}\rangle + \langle\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}\rangle = \frac{3}{4}\hbar\omega - \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{2}\cos(2\omega t) + \frac{3}{4}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\sqrt{2}\cos(2\omega t)$

$$= \frac{6}{4}\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

$\Rightarrow \langle H\rangle$ ist Zeitinvariant.