Klausur 1
Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Sommersemester 2024

Prof. Jörg Schmalian
Grgur Palle, Iksu Jang
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Date: 09. August 2024

Matrikelnummer: ______________

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Gesamt
Punkte:				

Klausur 1
Moderne Theoretische Physik I
Grundlagen der Quantenmechanik

Sommersemester 2024

Prof. Jörg Schmalian
Grgur Palle, Iksu Jang
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Date: 09. August 2024

Aufgabe 1. Zwei harmonische Oszillatoren

Wir betrachten zwei harmonische Oszillatoren mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2), \tag{1}$$

wobei $\hat{x}_i$ and $\hat{p}_i$ die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen: $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ und $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, mit $i, j = 1, 2$.

1. (**1.5 Punkte**) Mit Hilfe der Orts- und Impulsoperatoren $\hat{x}_i$, $\hat{p}_j$ definieren wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_i^\dagger$ sowie $\hat{a}_i$ wie folgt:

$$\hat{a}_i = \alpha\hat{x}_i + i\beta\hat{p}_i, \tag{2}$$
$$\hat{a}_i^\dagger = \alpha\hat{x}_i - i\beta\hat{p}_j \tag{3}$$

   wobei α und β reelle Zahlen sind.
   Bestimmen Sie α und β so, dass:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \tag{4}$$
$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \tag{5}$$
$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega\left(\hat{n}_j + \frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

   wobei $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$. Welches sind die Eigenwerte des Hamiltonoperators Gl. (1)?

2. (**1 Punkt**) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$[\hat{n}_i, \hat{a}_j] = -\hat{a}_j\delta_{ij}, \tag{7}$$
$$[\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_j^\dagger\delta_{ij}, \tag{8}$$
$$[\hat{n}_i, \hat{n}_j] = 0. \tag{9}$$

Betrachten wir nun, was passiert, wenn zwischen den beiden Oszillatoren eine zusätzliche Kopplung besteht:

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \gamma\hat{x}_1\hat{x}_2 \tag{10}$$

mit $|\gamma| \leq m\omega^2$.

3. (**1 Punkt**) Drücken Sie den neuen Term (d.h. $\gamma\hat{x}_1\hat{x}_2$) durch die in Teil 2 erhaltenen a_i und $a_i^\dagger$ aus und zeigen Sie, dass der neue Hamiltonoperator in Bezug auf $\hat{a}_i$ und $\hat{a}_i^\dagger$ nicht die gleiche Form wie Gleichung (6) hat.

4. (**3 Punkte**) Um die Eigenzustände des Hamiltonoperators in Gl. (10) zu finden, führen Sie neue kanonische Operatoren ein, die aus $\hat{x}_i$ und $\hat{p}_i$ bestehen. Betrachten Sie dazu

$$\hat{X}_i = a_i\hat{x}_1 + b_i\hat{x}_2, \tag{11}$$

$$\hat{P}_i = c_i\hat{p}_1 + d_i\hat{p}_2, \tag{12}$$

die die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{13}$$

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0. \tag{14}$$

wobei $i = 1, 2$. Finden Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i, so dass

$$\hat{H}' = \frac{\hat{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{P}_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2\hat{X}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2\hat{X}_2^2 \tag{15}$$

und drücken Sie m_1, m_2, ω_1 und ω_2 durch m, ω und γ aus.

Was passiert wenn $|\gamma| > m\omega^2$?

5. (**1 Punkt**) Finden Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{A}_i$ und $\hat{A}_i^\dagger$, mit $i = 1, 2$ die folgendermassen gegeben sind

$$\hat{A}_i = \alpha_i\hat{X}_i + i\beta_i\hat{P}_i, \tag{16}$$

$$\hat{A}_i^\dagger = \alpha_i\hat{X}_i - i\beta_i\hat{P}_i \tag{17}$$

und die die folgende Beziehung erfüllen

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \tag{18}$$

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = [\hat{A}_i^\dagger, \hat{A}_j^\dagger] = 0, \tag{19}$$

$$\hat{H}' = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega_j\left(\hat{N}_j + \frac{1}{2}\right). \tag{20}$$

Es gilt $\hat{N}_i = \hat{A}_i^\dagger\hat{A}_i$. Welches sind die Eigenwerte des Hamiltonoperators Gl. (10)?

Aufgabe 2. Doppeltes Dirac-Delta-Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einer Dimension im Potential

$$V(x) = -V_0\,\delta(x - L) - V_0\,\delta(x + L), \tag{21}$$

wobei $V_0 > 0$ sowie $L > 0$.

1. (**1 Punkt**) Welche Bedingung muss eine stationäre Wellenfunktion $\psi(x)$ bei $x = \pm L$ erfüllen, wenn sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung erfüllt?

2. (**4 Punkte**) Finden Sie alle gebundenen Zustände dieses Potentials. Die gebundenen Zustände müssen nicht normiert werden. Lösen Sie die dabei auftretende transzendente Gleichung grafisch.

   Wie viele gebundene Zustände gibt es?

3. (**1.5 Punkte**) Bestimmen Sie explizit die Energie des am wenigsten stark gebundenen Zustands zur niedrigsten Ordnung in δ, mit der Annahme, dass

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}L = 1 + \delta \tag{22}$$

   mit kleinem δ. (Der am wenigsten stark gebunde Zustand ist der gebundene Zustand mit der höchsten Energie. Die Taylorentwicklung $(1 + \coth s)s \approx 1 + s$ ist dabei hilfreich.)

4. (**1.5 Punkte**) Betrachten Sie eine kleine Störung des Potentials der Form

$$V(x) \to V(x) + v(x), \tag{23}$$

   wobei $v(x)$ eine glatte Funktion ist. Schreiben Sie innerhalb des Unterraums aller gebundenen Zustände die Integrale auf, deren Werte die Korrekturen erster und zweiter Ordnung der Energien bestimmen. Für welches $v(x)$ verschwindet die Energiekorrektur erster Ordnung? Und für welches $v(x)$ verschwindet die Energiekorrektur zweiter Ordnung? Welche Symmetrie ist dafür verantwortlich? Berücksichtigen Sie auch hier nur den Unterraum aller gebundenen Zustände.

Aufgabe 3. Spin-Triplett-Zustand mit Störung

Betrachten Sie zwei lokalisierte Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen mit den Spinoperatoren des ersten und zweiten Teilchens $\hat{\boldsymbol{S}}_1 = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbb{1}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{S}}_2 = \frac{\hbar}{2}\mathbb{1} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ die Pauli-Matrizen sind, wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

$\mathbb{1}$ ist die 2×2-Einheitsmatrix. Die Operatoren $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ wirken in der Basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ des gesamten Hilbert-Raums.

1. (**1.5 Punkte**) Schreiben Sie die Matrizen für $\hat{S}_{1,x}$ und $\hat{S}_{2,y}$ in der Basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ auf.

2. (**3 Punkte**) Führen Sie $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ ein. Berechnen Sie $[\hat{\Sigma}_i, \hat{\Sigma}_j]$ und finden Sie die Matrizen für $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^2$ und $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$.

Betrachten wir nun den folgenden Spin-Hamiltonoperator:

$$H = J\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 \qquad (J > 0). \tag{25}$$

3. (**1 Punkt**) Finden Sie mithilfe der Ergebnisse aus Teil 2 die Eigenzustände und Eigenwerte des Hamiltonoperators H. (Tipp: Verwenden Sie die Eigenwerte des gesamten $\hat{\Sigma}^z = \hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z$.)

4. (**1 Punkt**) Bestimmen Sie den Dichteoperator $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, wobei $|\Psi\rangle$ der Grundzustand ist.

5. (**1.5 Punkte**) Bestimmen Sie die reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}_1 = \mathrm{tr}_2(\hat{\rho})$ und ihre Eigenwerte. Bestimmen Sie mithilfe dieser Eigenwerte ($\{\lambda_i\}$) die Verschränkungsentropie des Grundzustands.

$$S = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \tag{26}$$