Universität Karlsruhe **4. Juli 1997**
Institut für Theorie der kondensierten Materie
Prof. Ralph v. Baltz, Dr. Alexander Mirlin

Klausur zur Theorie D: Quantenmechanik I, SS 1997

Name, Vorname: **Gruppe Nr.:**

- Arbeitszeit: 105 Minuten; keine Hilfsmittel. Beachten Sie die Hilfsformeln auf der Rückseite.

1. **(4 Punkte)** Gegeben sei ein System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2}y^2; \qquad c_1,\, c_2 > 0$$

   a) Welches mechanisches System wird durch $\hat{H}$ beschrieben?

   b) Geben Sie die Wellenfunktionen und die Energien der Eigenzustände von $\hat{H}$ an.

   c) Prüfen Sie, ob $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ ein Integral der Bewegung ist.

2. **(7 Punkte)** Gegeben sei ein harmonischer Oszillator der Masse m und der Kreisfrequenz ω. Zur Zeit $t = 0$ liege der folgende Zustand vor:

$$\psi(x) = A(\psi_0(x) - 2\psi_1(x)) \ ,$$

   wobei $\psi_n(x)$ die normierten Energie-Eigenzustände bezeichnen ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots$).

   a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.

   b) Wie lautet die zeitliche Entwicklung $\psi(x,t)$ des Zustandes?

   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung des Orts bzw. der Energie im Zustand $\psi(x,t)$.

   d) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\hat{H}$ (Ort, Impuls und Energie) im Zustand $\psi(x,t)$.

3. **(5 Punkte)** Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ U_0 > 0, & x > a \end{cases}$$

   a) Geben Sie die Struktur der Wellenfunktion eines gebundenes stationären Zustands an.

   b) Finden Sie die Eigenwertbedingung für die Energie eines gebundenen Zustands und lösen Sie diese Gleichung graphisch. Welche Bedingung müssen U_0 und a erfüllen, damit es mindestens einen gebundenen Zustand gibt?

...bitte wenden...

4. **(4 Punkte)** Die Hamiltonmatrix H und Observablen A, B eines Systems seien gegeben durch

$$H = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenzustände und die Eigenwerte von H.

b) Haben H und A bzw. H und B ein gemeinsames System von Eigenzuständen?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von B im Grundzustand des Systems.

Hilfsformeln

Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{(n!2^n)^{1/2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \ \ldots$$

Gaußsche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Viel Erfolg!