1. Warm-Up (8 Punkte)

(a) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien Hermite'sche Operatoren.

  (i) [1,5 Punkte] Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle$ rein imaginär ist.

  (ii) [1,5 Punkte] Sind folgende Operatoren Hermite'sch?
  1.) $\hat{A}\hat{B}\hat{A}$ 2.) $e^{i\hat{A}}$ 3.) $e^{i[\hat{A},\hat{B}]}$

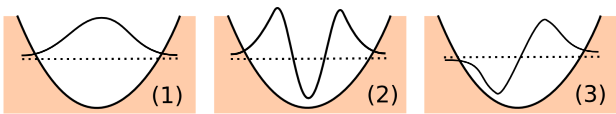
(b) [2 Punkte] Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist definiert als: $\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ Hermite'sch ist.

[Hinweis: Benutzen Sie die Definition eines Hermite'sch adjungierten Operators.]

(c) [2 Punkte] Der Zustand $|\psi\rangle$ eines eindimensionalen Systems sei in der Ortsdarstellung gegeben durch $\langle x|\psi\rangle = N\exp(-\kappa x^2)$ mit $N \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N, den Erwartungswert $\langle\hat{X}\rangle$ und die Standartabweichung ΔX.

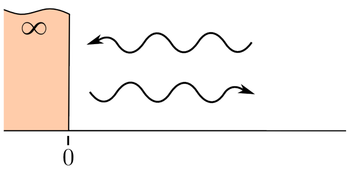
[Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$.]

(d) [1 Punkt] Ordnen Sie die Wellenfunktionen der gebundenen Zustände in der folgenden Abbildung nach aufsteigender Energie. Begründen Sie Ihre Antwort.



2. Totalreflektion (6 Punkte)

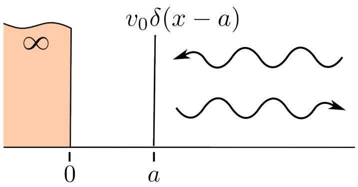
(a) [1 Punkt] Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung für das eindimensionale Potenzial



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion, der die Anschlussbedingung bei $x = 0$ erfüllt.

(b) Ein Teilchen mit der Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ befinde sich in dem eindimensionalen Potenzial



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ v_0\delta(x-a) & x \geq 0 \end{cases}, \quad v_0,\, a > 0.$$

Das Teilchen laufe von rechts ein und werde reflektiert.

  (i) [2 Punkte] Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$ links- und rechtsseitig der Delta-Barriere.

  (ii) [3 Punkte] Formulieren Sie die entsprechenden Anschlussbedingungen der Wellenfunktion bei $x = 0$ und $x = a$. Nutzen Sie dabei aus, dass das Teilchen totalreflektiert wird, d.h. der Reflektionskoeffizient gegeben ist durch $r = e^{i\varphi}$. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Streuphase φ und Energie E auf.

Bitte wenden !!!

3. Teilchen im Potenzial-Topf (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem eindimensionalen Potenzial-Topf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \qquad a > 0 \tag{1}$$

(a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenzustände $\phi_n(x)$ des zugehörigen Hamilton-Operators $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}$ und die entsprechenden Eigenenergien E_n mit $n \in \mathbb{N}$.

(b) [3 Punkte] Normieren Sie die Eigenzustände und zeigen Sie, dass diese orthogonal sind.

Hinweis: Folgende Relationen könnten hilfreich sein
$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$, $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$
$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$

4. Zwei-Zustands-System (7 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta & \varepsilon \end{pmatrix} = \mathbb{1}\varepsilon - \hat{\sigma}_x \Delta \tag{2}$$

in der Darstellung der Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Hierbei ist $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix und $\hat{\sigma}_i$ die Pauli-Matrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass

(i) $\hat{\sigma}_y^2 = \mathbb{1}$, (ii) $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z$,

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie weiter, dass $e^{i\alpha\hat{\sigma}_y} = \cos(\alpha) + i\hat{\sigma}_y \sin(\alpha)$.

Hinweis: Folgende Relationen könnten hilfreich sein

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

(c) [3 Punkte] Diagonalisieren Sie den Hamilton-Operator, d.h. finden Sie eine unitäre Matrix $\hat{U}$, so dass $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \mathrm{diag}(E_1, E_2)$. Hinweis: $\hat{U}$ kann geschrieben werden als $\hat{U} = e^{i\alpha\hat{\sigma}_y}$. Bestimmen Sie α, E_1 und E_2 entsprechend und schreiben Sie die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ als Linearkombination von $|u_1\rangle$ und $|u_2\rangle$.

(d) [2 Punkte] Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |u_1\rangle$ initialisiert. Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$. [Hinweis: Drücken Sie $|u_1\rangle$ durch die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ aus.]

Bitte wenden !!!

5. Bonusaufgabe: Messprozess (6 Punkte*)

In der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ seien der Hamilton-Operator $\hat{H}$ und die Observable $\hat{A}$ gegeben durch

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wir preparieren den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|v_1\rangle + |v_3\rangle\big). \tag{5}$$

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle\hat{H}\rangle$ und die Standardabweichung $\Delta E = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2}$.

(b) [2 Punkte] Der Zustand (5) sei präpariert und es werde die Observable $\hat{A}$ gemessen. Welche Werte a_i werden mit welchen Wahrscheinlichkeiten $P(a_i)$ gemessen? Was sind jeweils die entsprechenden Zustände nach der Messung?

(c) [2 Punkte] Unmittelbar nach der Messung in (b) mit dem Ergebnis a_i wird die Energie $\hat{H}$ gemessen. Bestimmen Sie wiederum die Werte E_j und die dazugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{a_i}(E_j)$ der Messung. Bestimmen Sie außerdem die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $P(E_j, a_i) = P_{a_i}(E_j)P(a_i)$.