1. Warm-Up (8 Punkte)

(a) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien Hermite'sche Operatoren.

(i) **[1,5 Punkte]**

Wir betrachten zunächst

$$[\hat{A},\, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A},\, \hat{B}] \quad \text{(1 Punkt).} \tag{1}$$

Damit gilt für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]|\psi\rangle^* = \langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]^\dagger|\psi\rangle = -\langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]|\psi\rangle \quad \text{(0.5 Punkte).} \tag{2}$$

Der Erwartungswert $\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle$ ist damit rein imaginär.

(ii) **[1,5 Punkte]**

$$\begin{aligned}
(\hat{A}\hat{B}\hat{A})^\dagger &= \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger = \hat{A}\hat{B}\hat{A} \rightarrow \text{Hermite'sch} \quad \text{(0.5 Punkte)} \\
\left(e^{i\,\hat{A}}\right)^\dagger &= e^{-i\,\hat{A}^\dagger} = e^{-i\,\hat{A}} \rightarrow \text{nicht Hermite'sch} \quad \text{(0.5 Punkte)} \\
\left(e^{i\,[\hat{A},\,\hat{B}]}\right)^\dagger &= e^{-i\,[\hat{A},\,\hat{B}]^\dagger} \underbrace{=}_{Gl.(1)} e^{i\,[\hat{A},\,\hat{B}]} \rightarrow \text{Hermite'sch} \quad \text{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}$$

(b) **[2 Punkte]**

Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist definiert durch: $\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Damit gilt insbesondere für zwei beliebige Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$

$$(\langle\psi|\hat{P}|\phi\rangle)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle\psi|\hat{P}|x\rangle\,\langle x|\phi\rangle\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle\psi|-x\rangle\,\langle x|\phi\rangle\right)^* \tag{3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle\phi|x\rangle\,\langle -x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle\phi|-x\rangle\,\langle x|\psi\rangle \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle\phi|\hat{P}|x\rangle\,\langle x|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{P}|\psi\rangle \tag{5}$$

Mit der Definition $\langle\phi|\hat{P}^\dagger|\psi\rangle = (\langle\psi|\hat{P}|\phi\rangle)^*$ folgt, dass $\hat{P}$ Hermite'sch ist.

(c) **[2 Punkte]**

Der Zustand $|\psi\rangle$ eines eindimensionalen Systems sei in der Ortsdarstellung gegeben durch $\langle x|\psi\rangle = N\exp(-\kappa x^2)$ mit $\kappa,\, N \in \mathbb{R}$. Die Normierungskonstante wird bestimmt durch

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\,\langle x|\psi\rangle\,|^2 &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(-2\kappa x^2) \\
&= N^2\sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}} \rightarrow N = \left(\frac{2\kappa}{\pi}\right)^{1/4} \quad \text{(0.5 Punkte)}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert $\langle \hat{X} \rangle$ ist gerade gleich null, da das Produkt $x \,|\, \langle x|\psi\rangle \,|^2$ antisymmetrisch ist und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \,|\, \langle x|\psi\rangle \,|^2 = 0 \quad \text{(0.5 Punkte)}$$

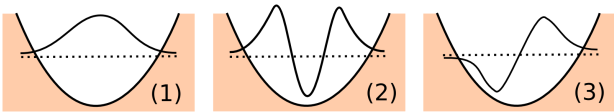
Um die Standartabweichung ΔX zu bestimmen, müssen wir noch $\langle \hat{X}^2 \rangle$ berechnen, d.h.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X}^2 \rangle &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 \exp(-2\kappa x^2) = -N^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp(-2\kappa x^2) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp(-2\kappa x^2) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa} N^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp(-2\kappa x^2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa} N^2 \right) \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}} = \frac{1}{4\kappa}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\Delta X = \sqrt{\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2} = \sqrt{1/4\kappa}$ [1 Punkt].

(d) **[1 Punkt]**

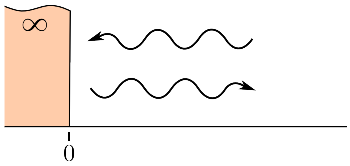
Die Wellenfunktionen können entsprechend der Anzahl ihrer Nullstellen (Knoten) nach aufsteigender Energie sortiert werden. Der n-te angeregte Zustand entspricht dabei dem Zustand mit n Knoten. Damit sind die Wellenfunktionen wie folgt zu sortieren: (1) → (3) → (2).



2. Totalreflektion (6 Punkte)

(a) **[1 Punkt]**

Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen in dem eindimensionalen Potenzial



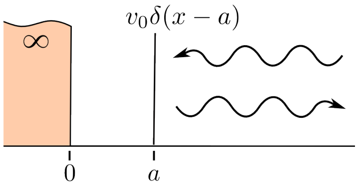
$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Die Wellenfunktion muss zwangsläufig bei $x = 0$ verschwinden, d.h. $\psi(x = 0) = 0$ sein. Im Bereich $x \geq 0$ sind die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators ebene Wellen. Die einzige Wellenfunktion, welche die Randbedingung erfüllt, ist

$$\psi(x) = N \sin(kx) \tag{6}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

(b) Ein Teilchen mit der Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ befinde sich in dem eindimensionalen Potenzial



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ v_0\delta(x-a) & x \geq 0 \end{cases}, \quad v_0,\, a > 0. \tag{7}$$

Das Teilchen laufe von rechts ein und werde reflektiert.

(i) **[2 Punkte]**

Ein geeigneter Ansatz, welcher sofort die Randbedingung bei $x = 0$ erfüllt (siehe (a)), ist gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\sin(kx) & 0 \leq x \leq a \\ Be^{-ikx} + Ce^{ikx} & a < x \end{cases}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

(ii) **[3 Punkte]**

Die Stetigkeitsbedingung bei $x = 0$ ist sofort gegeben, denn $\psi(0) = 0$. Bei $x = a$ müssen entsprechend die Anschlussbedingungen [1 Punkt]

$$\lim_{\epsilon \to 0} \psi(a+\epsilon) - \psi(a-\epsilon) = 0 \tag{8}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \partial_x\psi(a+\epsilon) - \partial_x\psi(a-\epsilon) = \frac{2mv_0}{\hbar^2}\psi(a) \tag{9}$$

erfüllt werden.

Das Teilchen wird totalreflektiert, d.h. $r = \frac{C}{B} = e^{i\varphi}$ und somit ist für $x > a$

$$\begin{aligned} \psi(x) = Be^{-ikx} + Ce^{ikx} &= Be^{i\varphi/2}\left(e^{-ikx-i\varphi/2} + e^{ikx+i\varphi/2}\right) \\ &= 2Be^{i\varphi/2}\cos(kx + \varphi/2) \\ &= A'\cos(kx+\varphi/2) \end{aligned} \tag{10}$$

Der Einfachkeit halber sei $A' = 2Be^{i\varphi/2}$ im Folgenden. Für die Anschlussbedingungen ergibt sich also [1 Punkt]

$$A' \cos(ka + \varphi/2) - A \sin(ka) = 0 \tag{11}$$

$$-kA' \sin(ka + \varphi/2) - kA \cos(ka) = \frac{2mv_0}{\hbar^2} A' \cos(ka + \varphi/2) \tag{12}$$

Nach Umformen erhalten wir

$$A' \cos(ka + \varphi/2) = A \sin(ka) \tag{13}$$

$$A' \bigg(-k \, \sin(ka + \varphi/2) - \frac{2mv_0}{\hbar^2} \cos(ka + \varphi/2) \bigg) = kA \cos(ka) \tag{14}$$

und damit ergibt sich der implizite Zusammenhang zwischen Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ und Phase φ [1 Punkt]

$$-k \, \tan(ka + \varphi/2) - \frac{2mv_0}{\hbar^2} = k \cot(ka). \tag{15}$$

Für $v_0 = 0$ ist dann $\varphi = \pi$ (siehe Teilaufgabe (a)).

3. Teilchen im Potenzial-Topf (6 Punkte)

Gegeben sei der eindimensionale Potenzial-Topf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} , \qquad a > 0 \tag{16}$$

(a) **[3 Punkte]**

Die Eigenzustände sind gegeben durch

$$\phi_n(x) = N \begin{cases} \cos(k_n x) & n = 1,\, 3,\, 5,\, ... \quad [1\ \text{Punkt}] \\ \sin(k_n x) & n = 2,\, 4,\, 6,\, ... \quad [1\ \text{Punkt}] \end{cases} \tag{17}$$

mit $k_n = \frac{\pi}{a} n$. Die Eigenenergien sind gegeben durch $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ [1 Punkt].

(b) **[3 Punkte]**

Zunächst wird die Normierungskonstante N bestimmt,

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \phi_n^*(x)\phi_n(x) = |N|^2 \left\{ \begin{array}{ll} \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \cos^2(\frac{\pi}{a} nx), & n = 1, 3, 5, ... \\ \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin^2(\frac{\pi}{a} nx), & n = 2, 4, 6, ... \end{array} \right\} = |N|^2 \frac{a}{2} = 1 \tag{18}$$

Damit ergibt sich $|N| = \sqrt{\frac{2}{a}}$ [1,5 Punkte].
Nun bleibt noch die orthogonalität zu zeigen [1,5 Punkte].
Es sei im Folgenden $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \cos\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} mx\right) &= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \cos\left(\frac{\pi}{a}[n-m]x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{a}[n+m]x\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{a}(n-m)} \sin\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n-m]}_{gerade} x\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{a}(n+m)} \sin\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n+m]}_{gerade} x\right) \right]_{x=-a/2}^{a/2} \\
&= 0 \\
\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} mx\right) &= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \cos\left(\frac{\pi}{a}[n-m]x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{a}[n+m]x\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{a}(n-m)} \sin\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n-m]}_{gerade} x\right) - \frac{1}{\frac{\pi}{a}(n+m)} \sin\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n+m]}_{gerade} x\right) \right]_{x=-a/2}^{a/2} \\
&= 0 \\
\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} mx\right) &= \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{\pi}{a}[n-m]x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}[n+m]x\right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{a}(n-m)} \cos\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n-m]}_{ungerade} x\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{a}(n+m)} \cos\left(\frac{\pi}{a} \underbrace{[n+m]}_{ungerade} x\right) \right]_{x=-a/2}^{a/2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. Zwei-Zustands-System (9 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta & \varepsilon \end{pmatrix} = \mathbb{1}\varepsilon - \hat{\sigma}_x \Delta \tag{19}$$

in der Darstellung der Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Hierbei ist $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix und $\hat{\sigma}_i$ die Pauli-Matrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

(a) **[1 Punkt]**

Zeigen Sie, dass

(i) [0,5 Punkte]

$$\hat{\sigma}_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) [0,5 Punkte]

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z \tag{21}$$

(b) **[1 Punkt]**

Wir schreiben die Exponetialfunktion in Reihendarstellung,

$$e^{i\alpha\hat{\sigma}_y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\hat{\sigma}_y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k \hat{\sigma}_y^k}{k!}.$$

Mit $i^2 = -1$ und $\hat{\sigma}_y^2 = \mathbb{1}$ folgt

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\hat{\sigma}_y} &= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + i\hat{\sigma}_y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1}\cos(\alpha) + i\hat{\sigma}_y \sin(\alpha). \end{aligned}$$

(c) **[3 Punkte]**

Gegeben sei die unitäre Matrix $\hat{U} = e^{i\alpha\hat{\sigma}_y}\cos(\alpha) + i\hat{\sigma}_y \sin(\alpha)$ und der Hamilton-Operator $\hat{H} = \mathbb{1}\varepsilon - \hat{\sigma}_x\Delta$. Mit den Relationen aus (a) und (b) finden wir

$$\begin{aligned}
\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger &= e^{i\alpha\hat{\sigma}_y}(\mathbb{1}\varepsilon - \hat{\sigma}_x\Delta)e^{-i\alpha\hat{\sigma}_y} \\
&= (e^{i\alpha\hat{\sigma}_y}\mathbb{1}e^{-i\alpha\hat{\sigma}_y}\varepsilon - e^{i\alpha\hat{\sigma}_y}\hat{\sigma}_x e^{-i\alpha\hat{\sigma}_y}\Delta) \\
&\underbrace{=}_{(21)} \mathbb{1}\varepsilon - e^{i2\alpha\hat{\sigma}_y}\hat{\sigma}_x\Delta \\
&= \mathbb{1}\varepsilon - [\mathbb{1}\cos(2\alpha) + i\hat{\sigma}_y\sin(2\alpha)]\hat{\sigma}_x\Delta
\end{aligned}$$

Damit die Nebendiagonal-Elemente verschwinden, muss $\alpha = \pi/4$ [1 Punkt] sein und wir erhalten

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}\varepsilon - \hat{\sigma}_z\Delta.$$

Damit sind die Eigenenergien gegeben durch $E_1 = \varepsilon - \Delta$ und $E_2 = \varepsilon + \Delta$ [1 Punkt]. Die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ können wir direkt aus $\hat{U}$ ablesen [1 Punkt],

$$\hat{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|u_1\rangle + |u_2\rangle)$$

Alternativ können ausgehend von dem charakteristischen Polynom

$$\begin{vmatrix} \lambda - \varepsilon & \Delta \\ \Delta & \lambda - \varepsilon \end{vmatrix} = (\lambda - \varepsilon)^2 - \Delta^2 = 0$$

die Eigenwerte bestimmt werden. Wir finden $\lambda_\mp = \varepsilon \mp \Delta \equiv E_{1,2}$. Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda_\mp - \varepsilon & \Delta & 0 \\ \Delta & \lambda_\mp - \varepsilon & 0 \end{array}\right)$$

ergeben sich außerdem die Eigenvektoren

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|u_1\rangle + |u_2\rangle)$$

und damit die unitäre Matrix

$$\hat{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich mit

$$\hat{U}^\dagger = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

liefert $\alpha = \pi/4$.

(d) **[2 Punkte]**

Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |u_1\rangle$ initialisiert,

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Für $t > 0$ ergibt sich dann entsprechend

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle\, e^{-iE_1 t/\hbar} - |\psi_2\rangle\, e^{-iE_2 t/\hbar}) \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Wir können $|\psi(t)\rangle$ auch als Linearkombination von $|u_1\rangle$ und $|u_2\rangle$ schreiben,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}(|u_1\rangle\, [e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-iE_2 t/\hbar}] + |u_2\rangle\, [e^{-iE_1 t/\hbar} - e^{-iE_2 t/\hbar}]) \\ &= |u_1\rangle\, e^{-i\varepsilon t/\hbar} \cos(\Delta t/\hbar) + i\, |u_2\rangle\, e^{-i\varepsilon t/\hbar} \sin(\Delta t/\hbar) \end{aligned}$$

5. Bonusaufgabe: Messprozess (6 Punkte*)

In der Basis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ seien der Hamilton-Operator $\hat{H}$ und die Observable $\hat{A}$ gegeben durch

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Wir preparieren den Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|v_1\rangle + |v_3\rangle\big). \tag{23}$$

(a) **[2 Punkte]**

Zunächst sind

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(E_1 + E_3), \qquad [0{,}5 \text{ Punkte}]$$
$$\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle = \frac{1}{2}(E_1^2 + E_3^2). \qquad [0{,}5 \text{ Punkte}]$$

Und damit $\Delta E = \frac{1}{2}|E_1 - E_3|$ [1 Punkt].

(b) **[2 Punkte]**

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von $\hat{A}$,

$$\det(a\mathbb{1} - \hat{A}) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = a[a^2 - 2] = 0$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind damit gegeben durch [1 Punkt]

$$\underline{a_0 = 0:} \qquad |a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle - |v_3\rangle)$$
$$\underline{a_+ = \sqrt{2}:} \qquad |a_+\rangle = \frac{1}{2}(|v_1\rangle + \sqrt{2}\,|v_2\rangle + |v_3\rangle)$$
$$\underline{a_- = -\sqrt{2}:} \qquad |a_-\rangle = \frac{1}{2}(|v_1\rangle - \sqrt{2}\,|v_2\rangle + |v_3\rangle)$$

In der Eigenbasis von $\hat{A}$ ist der präparierte Zustand gegeben durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|v_1\rangle + |v_3\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_+\rangle + |a_-\rangle) \tag{24}$$

Damit messen wir $a_0 = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(a_0) = 0$ und $a_\pm = \pm\sqrt{2}$ mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $P(a_\pm) = \frac{1}{2}$ [1 Punkt].

(c) **[2 Punkte]**

Unmittelbar nach der Messung in (b) befinde sich das Sytem entweder im Zustand

$$|a_+\rangle = \frac{1}{2}(|v_1\rangle + \sqrt{2}\,|v_2\rangle + |v_3\rangle) \tag{25}$$

oder

$$|a_-\rangle = \frac{1}{2}(|v_1\rangle - \sqrt{2}\,|v_2\rangle + |v_3\rangle) \tag{26}$$

[1 Punkt]

Sei $P(a_\pm)$ die Wahrscheinlichkeit, $a_\pm$ zu messen und $P_{a_\pm}(E_i)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, E_i zu messen, wenn Unmittelbar zuvor $a_\pm$ gemessen wurde, so ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P(E_i, a_\pm) = P_{a_\pm}(E_i)P(a_\pm) \tag{27}$$

Wir erhalten [1 Punkt]

$$P_{a_\pm}(E_1) = \frac{1}{4} \tag{28}$$

$$P_{a_\pm}(E_2) = \frac{1}{2} \tag{29}$$

$$P_{a_\pm}(E_3) = \frac{1}{4} \tag{30}$$

und

$$P(E_1, a_\pm) = \frac{1}{8} \tag{31}$$

$$P(E_2, a_\pm) = \frac{1}{4} \tag{32}$$

$$P(E_3, a_\pm) = \frac{1}{8} \tag{33}$$