Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungsklausur zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil **3.6.15**

---

1. Warm-Up Fragen (5 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bitte kurz in 1 bis 2 Sätzen:

(a) (1 Punkt) Geben Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung in 3 Dimensionen für ein Teilchen in einem Potential $V(\mathbf{r})$ an. Wie erhält man daraus die stationäre Schrödingergleichung?

(b) (1 Punkt) Geben Sie die de-Broglie Relationen zwischen Energie und Frequenz sowie zwischen Impuls und Wellenvektor an. Nutzen Sie diese Relationen um den Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor und der Frequenz für ein nichtrelativistisches Teilchen zu finden.

(c) (1 Punkt) Was sind die quantenmechanischen Eigenenergien E_n eines Teilchen mit Masse m in einer Dimension im Potential $V(x) = \frac{k}{2}x^2$?

(d) (1 Punkt) Geben Sie den Ausdruck die Dichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ des Wahrscheinlichkeitsstroms an, der die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$ löst. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist dabei wie üblich definiert als $\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2$.

(e) (1 Punkt) Die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r},t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r},t)}e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{r},t)}$ kann immer durch eine Amplitude und Phase ausgedrückt werden. Ist die Phase im Experiment beobachtbar? Falls nicht, wieso? Falls ja, welche physikalische Observable ist mit der Phase verknüpft?

2. Kommutatoren und Algebra (5 Punkte)

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, ausgehend von $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$, dass gilt:

$$[\hat{x}_j^n, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}n\hat{x}_j^{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Ein eleganter Lösungsweg führt über vollständige Induktion.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie für den (eindimensionalen) Potentialoperator $V(\hat{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m\hat{x}^m$:

$$[V(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar V'(\hat{x})$$

(c) (1 Punkt) Was bedeutet es physikalisch für einen Messprozess, wenn zwei hermitesche Operatoren nicht vertauschen? Was gilt für die Eigenfunktionen zweier vertauschender Operatoren?

3. Zeitentwicklung und harmonischer Oszillator (5 Punkte)

(a) (2 Punkte) Ein quantenmechanisches System ist beschrieben durch den zeitunabhängigen Hamiltonoperator $\hat{H}$. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Erwartungswert eines (nicht explizit zeitabhängigen) Operators $\hat{A}$ gegeben ist durch

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{A} \rangle_t = i\hbar \partial_t \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle_t \tag{1}$$

(b) (1 Punkt) Betrachten Sie nun den eindimensionalen harmonischen Oszillator, gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 = \hbar\omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2 \right] \tag{2}$$

wobei

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right] \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right]. \tag{3}$$

die Auf- und Absteigeoperatoren sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{4}$$

und

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \tag{5}$$

(c) (2 Punkte) Benutzen Sie Gleichung (1) um die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte $\langle \hat{a} \rangle_t, \langle \hat{a}^\dagger \rangle_t$ zu bestimmen. Lösen Sie die auftretende Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $\langle \hat{a} \rangle_{t=0} = a_0$ und $\langle \hat{a}^\dagger \rangle_{t=0} = a_0^*$.

4. Unendlich hoher Potentialtopf (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und Eigenenergien E_n dieses Systems. *Hinweis:* $\int_0^\pi dz \sin(z)^2 = \pi/2$.

(b) (1 Punkt) Zeigen oder argumentieren Sie, dass die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ ein Orthonormalsystem bilden.

(c) (2 Punkte) *Für die folgende Aufgabe werden keine Ergebnisse aus (a) und (b) benötigt:* Im Folgenden bezeichnet $|1\rangle$ den Grundzustand des Systems mit Energie E_1, $|2\rangle$ den erste angeregten Zustand mit Energie E_2. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(0)\rangle$ des Systems gegeben durch eine Superposition des Grundzustands $|1\rangle$ und des ersten angeregten Zustands $|2\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|1\rangle + |2\rangle \big). \tag{7}$$

Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für beliebige Zeiten t als Funktion von $E_1, E_2, |1\rangle, |2\rangle$. Für $t > 0$, was ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Experiment die Energie E_1 zu messen?