Übungsblatt I Theoretische Physik D

Marco Schreck, Matrikelnummer: 1096937

0.1 Übungsblatt I

0.1.1 Aufgabe 1

a.)

- Ort in Abhängigkeit von der Zeit $\vec{r}(t)$
- Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit $\vec{v}(t)$

Zusammenhänge zwischen diesen Größen lauten:

$$\boxed{E_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^2,\ E_{pot} = V(\vec{r}) \cdot m,\ \vec{p} = m\vec{v}}$$

Weiterhin haben wir:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})}$$

b.)

- Potential φ des elektrischen Feldes
- Vektorpotential $\vec{A}$ des magnetischen Feldes

Mit der Ladungsdichte erhalten wir:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'}$$

Hieraus ergeben sich dann die Felder:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}}$$

Es gilt für die magnetische Feldenergie:

$$\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2}\int \vec{j}(\vec{r},t) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r}$$

Und für die elektrische gilt:

$$\boxed{W_{el} = -q\int_{r_0}^{r} \vec{E}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}' = q \cdot U}$$

c.)

- Stoffmenge n
- Volumen V
- Druck p

$$\boxed{p = \frac{F}{A}}$$

- Temperatur T

Durch Angabe von dreien der vier Größen ist der Zustand des idealen Gases eindeutig bestimmt. Eine sehr wichtige Beziehung zwischen diesen Größen ist in diesem Falle die ideale Gasgleichung:

$$\boxed{pV = nRT \text{ mit der Gaskonstante } R}$$

Für die Expansion gegen einen äußeren Druck haben wir:

$$\boxed{W = -p_{ex}\Delta V}$$

Außerdem gilt bei reversibler isothermer Kompression oder Expansion:

$$\boxed{W = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Und schließlich noch bei adiabatischer Kompression oder Expansion:

$$\boxed{W = C_V \cdot \Delta T}$$

0.1.2 Aufgabe 2

a.)

Die Lagrange-Funktion setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen:

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = T - V = \boxed{\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2}$$

$$\mathcal{H}(p, x) = \dot{x}p - \mathcal{L} = \dot{x} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \dot{x} \cdot m\dot{x} - \mathcal{L} = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2 = \boxed{\frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2}$$

c.)

- Bewegungsgleichung aus Lagrange-Funktion:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -Dx$$

  Die Lagrange-Gleichung lautet:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{x} = 0$$

  Damit gilt also:

  $$\boxed{m\ddot{x} + Dx = 0}$$

- Bewegungsgleichung aus Hamilton-Funktion:
  Wir berechnen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

  $$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

  $$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Dx$$

  Also folgt auch hier:

  $$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = \frac{-Dx}{m}$$

  $$\boxed{m\ddot{x} + Dx = 0}$$

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das charakteristische Polynom dieser Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0$$

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Damit erhalten wir als Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$\boxed{x(t) = A\exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) + B\exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) = A\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right)}$$

0.1.3 Aufgabe 3

a.)

Die Poisson-Klammern wurden in der Vorlesung folgendermaßen definiert:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial r_i} - \frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right]$$

Für den Drehimpuls gilt:

$$\vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = e_x\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix} - e_y\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} + e_z\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2p_3 - p_2x_3 \\ x_3p_1 - x_1p_3 \\ x_1p_2 - x_2p_1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Poisson-Klammern $\{L_i, L_k\}$ zunächst durch Ableiten:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir also dann:

$$\boxed{\{L_1, L_2\} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = p_1x_2 - p_2x_1 = -L_3}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_3}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt also:

$$\boxed{\{L_3, L_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = p_3x_1 - p_1x_3 = -L_2}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_3}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\boxed{\{L_2, L_3\} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 p_2 - p_3 x_2 = -L_1}$$

Trivialerweise gilt noch, wie man direkt an der Definition sehen kann, für zwei gleiche Größen:

$$\{L_i, L_i\} = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L_k}{\partial p_i} \frac{\partial L_k}{\partial x_i} - \frac{\partial L_k}{\partial x_i} \frac{\partial L_k}{\partial p_i} \right] = \boxed{0}$$

Aufgrund der Antisymmetrie haben wir noch bei Vertauschung zweier Indizes:

$$\{L_k, L_i\} = -(-L_l) = \boxed{L_l}$$

Also gilt zusammenfassend:

$$\boxed{\{L_i, L_k\} = \begin{cases} -L_l & \text{für} \quad i,k,l \text{ zyklisch aus } 1,2,3 \\ L_l & \text{für} \quad i,k,l \text{ antizyklisch aus } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Nun berechnen wir noch die Poisson-Klammer $\{|\vec{L}|^2, L_i\}$. Aus $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ergibt sich $|\vec{L}|^2 = r \cdot p \cdot \sin\alpha$. Also gilt:

$$\frac{\partial |\vec{L}|^2}{\partial \vec{p}} = 2r^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial |\vec{L}|^2}{\partial \vec{r}} = 2p^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \{|\vec{L}|^2, L_1\} &= 2r^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix} - 2p^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2r^2 \sin^2\alpha \underbrace{[p_2 p_3 - p_2 p_3]}_{0} - 2p^2 \sin^2\alpha \underbrace{[-x_2 x_3 + x_2 x_3]}_{0} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{|\vec{L}|^2, L_2\} &= 2r^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix} - 2p^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= 2r^2 \sin^2\alpha \underbrace{[-p_1 p_3 + p_1 p_3]}_{0} - 2p^2 \sin^2\alpha \underbrace{[x_1 x_3 - x_1 x_3]}_{0} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial L_3}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{|\vec{L}|^2, L_3\} &= 2r^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2p^2 \sin^2\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2r^2 \sin^2\alpha \underbrace{[p_1 p_2 - p_1 p_2]}_{0} - 2p^2 \sin^2\alpha \underbrace{[-x_1 x_2 + x_1 x_2]}_{0} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\{|\vec{L}|^2, L_i\} = 0 \text{ für } i \in [1,2,3]}$$

b.)

Als erstes berechnen wir kurz:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \frac{\partial L_2}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \frac{\partial L_3}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt dann:

$\{L_1, x_1\} = 0$, $\{L_1, x_2\} = -x_3$, $\{L_1, x_3\} = x_2$

$\{L_2, x_1\} = x_3$, $\{L_2, x_2\} = 0$, $\{L_2, x_3\} = -x_1$

$\{L_3, x_1\} = -x_2$, $\{L_3, x_2\} = x_1$, $\{L_3, x_3\} = 0$

Analog folgt:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}, \frac{\partial L_2}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \frac{\partial L_3}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten somit:

$\{L_1, p_1\} = 0$, $\{L_1, p_2\} = -p_3$, $\{L_1, p_3\} = p_2$

$\{L_2, p_1\} = p_3$, $\{L_2, p_2\} = 0$, $\{L_2, p_3\} = -p_1$

$\{L_3, p_1\} = -p_2$, $\{L_3, p_2\} = p_1$, $\{L_3, p_3\} = 0$

Wir berechnen damit die Poisson-Klammern mit den algebraischen Rechenregeln:

$$\{L_1, L_2\} = \{L_1, (x_3p_1 - x_1p_3)\} = \{L_1, x_3p_1\} - \{L_1, x_1p_3\} = x_3 \underbrace{\{L_1, p_1\}}_{0} + p_1 \underbrace{\{L_1, x_3\}}_{x_2} - \underbrace{\{L_1, x_1\}}_{0} p_3 - \underbrace{\{L_1, p_3\}}_{p_2} x_1 =$$
$$= \boxed{p_1x_2 - p_2x_1 = -L_3}$$

$$\{L_3, L_1\} = \{L_3, (x_2p_3 - x_3p_2)\} = \{L_3, x_2p_3\} - \{L_3, x_3p_2\} = x_2 \underbrace{\{L_3, p_3\}}_{0} + p_3 \underbrace{\{L_3, x_2\}}_{x_1} - \underbrace{\{L_3, x_3\}}_{0} p_2 - \underbrace{\{L_3, p_2\}}_{p_1} x_3 =$$
$$= \boxed{p_3x_1 - p_1x_3 = -L_2}$$

$$\{L_2, L_3\} = \{L_2, (x_1p_2 - x_2p_1)\} = \{L_2, x_1p_2\} - \{L_2, x_2p_1\} = x_1 \underbrace{\{L_2, p_2\}}_{0} + p_2 \underbrace{\{L_2, x_1\}}_{x_3} - \underbrace{\{L_2, x_2\}}_{0} p_1 - \underbrace{\{L_2, p_1\}}_{p_3} x_2 =$$
$$= \boxed{p_2x_3 - p_3x_2 = -L_1}$$

Für gleiche Indizes gilt:

$$\{L_1, L_1\} = \{L_1, x_2p_3 - x_3p_2\} = \{L_1, x_2p_3\} - \{L_1, x_3p_2\} = x_2 \underbrace{\{L_1, p_3\}}_{p_2} + p_3 \underbrace{\{L_1, x_2\}}_{x_3} - x_3 \underbrace{\{L_1, p_2\}}_{p_3} - p_2 \underbrace{\{L_1, x_3\}}_{x_2} =$$
$$= x_2p_2 + p_3x_3 - x_3p_3 - p_2x_2 = \boxed{0}$$

$$\{L_2, L_2\} = \{L_2, x_3p_1 - x_1p_3\} = \{L_2, x_3p_1\} - \{L_2, x_1p_3\} = x_3 \underbrace{\{L_2, p_1\}}_{p_3} + p_1 \underbrace{\{L_2, x_3\}}_{x_1} - x_1 \underbrace{\{L_2, p_3\}}_{p_1} - p_3 \underbrace{\{L_2, x_1\}}_{x_3} =$$
$$= x_3p_3 + p_1x_1 - x_1p_1 - p_3x_3 = \boxed{0}$$

$$\{L_3, L_3\} = \{L_3, x_1p_2 - x_2p_1\} = \{L_3, x_1p_2\} - \{L_3, x_2p_1\} = x_1 \underbrace{\{L_3, p_2\}}_{p_1} + p_2 \underbrace{\{L_3, x_1\}}_{x_2} - x_2 \underbrace{\{L_3, p_1\}}_{p_2} - p_1 \underbrace{\{L_3, x_2\}}_{x_1} =$$
$$= x_1p_1 + p_2x_2 - x_2p_2 - p_1x_1 = \boxed{0}$$

Aufgrund der Antisymmetrie erhalten wir wieder beim Vertauschen der Indizes:

$\{L_k, L_i\} = -(-L_l) = L_l$

Damit folgt wieder das gleiche Ergebnis wie zuvor:

$$\boxed{\{L_i, L_k\} = \begin{cases} -L_l & \text{für} \quad i,k,l \text{ zyklisch aus } 1,2,3 \\ L_l & \text{für} \quad i,k,l \text{ antizyklisch aus } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Nun berechnen wir außerdem:

$$\begin{aligned}\{|\vec{L}|^2, L_1\} &= \{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_1\} = \{L_1^2, L_1\} + \{L_2^2, L_1\} + \{L_3^2, L_1\} = \\ &= L_1\{L_1, L_1\} + L_1\{L_1, L_1\} + L_2\{L_2, L_1\} + L_2\{L_2, L_1\} + L_3\{L_3, L_1\} + L_3\{L_3, L_1\} = \\ &= 2L_1 \underbrace{\{L_1, L_1\}}_{0} + 2L_2 \underbrace{\{L_2, L_1\}}_{L_3} + 2L_3 \underbrace{\{L_3, L_1\}}_{-L_2} = 2L_2L_3 - 2L_3L_2 = \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{|\vec{L}|^2, L_2\} &= \{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_2\} = \{L_1^2, L_2\} + \{L_2^2, L_2\} + \{L_3^2, L_2\} = \\ &= L_1\{L_1, L_2\} + L_1\{L_1, L_2\} + L_2\{L_2, L_2\} + L_2\{L_2, L_2\} + L_3\{L_3, L_2\} + L_3\{L_3, L_2\} = \\ &= 2L_1 \underbrace{\{L_1, L_2\}}_{-L_3} + 2L_2 \underbrace{\{L_2, L_2\}}_{0} + 2L_3 \underbrace{\{L_3, L_2\}}_{L_1} = -2L_1L_3 + 2L_3L_1 = \boxed{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{|\vec{L}|^2, L_3\} &= \{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_3\} = \{L_1^2, L_3\} + \{L_2^2, L_3\} + \{L_3^2, L_3\} = \\ &= L_1\{L_1, L_3\} + L_1\{L_1, L_3\} + L_2\{L_2, L_3\} + L_2\{L_2, L_3\} + L_3\{L_3, L_3\} + L_3\{L_3, L_3\} = \\ &= 2L_1 \underbrace{\{L_1, L_3\}}_{L_2} + 2L_2 \underbrace{\{L_2, L_3\}}_{-L_1} + 2L_3 \underbrace{\{L_3, L_3\}}_{0} = 2L_1L_2 - 2L_2L_1 = \boxed{0}\end{aligned}$$

Allgemein gilt also:

$$\boxed{\{|\vec{L}|^2, L_i\} = 0 \text{ für } i \in [1,2,3]}$$

0.1.4 Aufgabe 4

a.)

Für die Funktion $w(x)$ erhalten wir:

- Normierungskonstante:
  Es muß gelten:

$$A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x = 1$$

$$A = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x}$$

Zur Berechnung benötigen wir also das Integral im Nenner:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2a^2}}} = \sqrt{2a^2\pi} = \sqrt{2\pi} \cdot a$$

Damit folgt also:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}}$$

- Erwartungswert:

  Den Erwartungswert berechnen wir folgendermaßen:

  $$\langle x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

  Zur Berechnung des Integrals leiten wir die Funktion $I(\alpha)$ nach x ab:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\left(-\alpha x^2\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -2\alpha x\exp\left(-\alpha x^2\right)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = 0$$

  Also gilt:

  $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-\alpha x^2\right)\,\mathrm{d}x = 0$$

  Dies hätte man sich auch so denken können, da es sich um eine ungerade Funktion handelt. Damit ergibt sich also:

  $$\boxed{\langle x\rangle = 0}$$

- Streuung:

  $(\Delta X)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$

  Wir berechnen zuerst $\langle x^2\rangle$:

  $$\langle x^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

  Dazu leiten wir $I(\alpha)$ nach α ab:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\exp\left(-\alpha x^2\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -x^2\exp\left(-\alpha x^2\right)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

  $$\langle x^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot 2\sqrt{2}a^3 = a^2$$

  Damit erhalten wir für die Streuung:

  $$(\Delta X)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = a^2 - 0^2 = \boxed{a^2}$$

Für $v(x)$ folgt:

- Normierungskonstante:

  Es muß gelten:

  $$B\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\,\mathrm{d}x = 1$$

  $$B = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\,\mathrm{d}x}$$

  Zur Berechnung benötigen wir also das Integral im Nenner. Dazu leiten wir $I(\alpha)$ wieder nach α ab:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\exp\left(-\alpha x^2\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -x^2\exp\left(-\alpha x^2\right)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

Also gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right) \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2\sqrt{2}a^3 = \sqrt{2\pi}a^3$$

Damit resultiert nun:

$$\boxed{B = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}}}$$

- Erwartungswert:
  Den Erwartungswert berechnen wir folgendermaßen:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \, \mathrm{d}x$$

Das Integral können wir direkt über dessen Stammfunktion berechnen:

$$x^2 = u$$

$$\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xu \exp\left(-\frac{u}{2a^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a^3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \exp\left(-\frac{u}{2a^2}\right) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a^3}} \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\langle x \rangle = 0}$$

- Streuung:

$$(\Delta X)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Wir berechnen zuerst $\langle x^2 \rangle$:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \cdot x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

Dieses Integral erhalten wir durch zweimaliges Differenzieren von $I(\alpha)$ nach α:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp\left(-\alpha x^2\right) \stackrel{!}{=} \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}$$

Dann ergibt sich:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^3}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \cdot 4\sqrt{2}a^5 = \frac{3a^5}{a^3} = 3a^2$$

$$(\Delta X)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 3a^2 - 0^2 = \boxed{3a^2}$$

b.)

- Normierungskonstante:
  Hier haben wir keine kontinuierliche Funktion, sondern eine diskrete Verteilung. Damit folgt:

$$C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=1\Leftrightarrow C=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}}$$

  Bei der unendlichen Reihe handelt es sich natürlich um die Exponentialfunktion, womit folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=\exp(a)$$

  Also gilt:

$$\boxed{C=\frac{1}{\exp(a)}=\exp(-a)}$$

- Erwartungswert:

$$\langle n\rangle=\exp(-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot n=\exp(-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(n-1)!}=\exp(-a)\cdot\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n!}=\exp(-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n!}=$$

$$=\exp(-a)\cdot a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=a\exp(a)\cdot\exp(-a)=\boxed{a}$$

- Streuung:
  Nach Definition erhalten wir:

$$\langle n^2\rangle=\exp(-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot n^2=a\exp(-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{n!}n^2$$

  Dann ergibt sich durch Integration:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{n!}n^2\right]\mathrm{d}a\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a^{n-1}}{n!}n^2\right]\mathrm{d}a\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot n\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(n-1)!}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[a\exp(a)\right]=a\exp(a)+\exp(a)=\exp(a)\left[a+1\right]$$

  Durch anschließende Multiplikation mit $a\cdot\exp(-a)$ erhalten wir den Grenzwert für die ursprüngliche Summe:

$$\langle n^2\rangle=a\exp(-a)\cdot\exp(a)\left[a+1\right]=a\left[a+1\right]$$

$$(\Delta N)^2=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2=a^2+a-a^2=\boxed{a}$$