Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz , Dr. Ralph Werner 8.5.03
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre werner@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 2 zur Theorie D: Wellenmechanik

$\boxed{1}$ **Klassische Wellen in einer Dimension** werden durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{beschrieben.} \tag{1}$$

a) Durch welche Größen wird ein Zustand des Ψ-Feldes beschrieben? Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung (Hinweis: Theorie C)? Beweisen Sie Ihre Aussage (Hinweis: Fourierdarstellung). Nutzen Sie dabei aus, dass eine Funktion $\tilde{\Psi}(q,\omega)$, die die Zwangsbedingung $q^2 = \omega^2/c^2$ erfüllt, darstellbar ist als $\tilde{\Psi}(q,\omega) = \tilde{f}(\omega)\delta(q-\frac{\omega}{c}) + \tilde{g}(\omega)\delta(q+\frac{\omega}{c})$.

b) Bestimmen Sie die beiden freien Funktionen der allgemeinen Lösung so, dass die Anfangsbedingungen $\Psi(x,0) = \theta(1-x^2)$ und $\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$ erfüllt sind. Skizzieren Sie die gefundene Lösung für die Zeiten $t=0$, $ct<1$, $ct=1$ und $ct>1$.

$\boxed{2}$ **Übergang zu Materiewellen.** Zeigen Sie (analog zum Beweis in Aufgabe 1), dass die allgemeine Lösung $\Phi(x,t)$ der Schrödingergleichung für ein freies Teilchen mit Masse m derer einer klassischen Welle in einem dispersiven Medium mit Brechungsindex $n(\omega)$ entspricht, also $c \to c/n(\omega) = v_{\mathrm{ph}}(\omega)$ in Gleichung (1) im ω-Raum.

a) Wie lauten $n(\omega)$ bzw. $v_{\mathrm{ph}}(\omega)$?

b) Wie vereinfacht sich die Lösung für ein **monochromatisches** "Teilchen"? Bestimmen Sie für diesen Fall die de-Broglie-Wellenlänge sowie $\langle\hat{H}\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

$\boxed{3}$ **Materiewellen im Vakuum: Gauß'sches Wellenpaket (Teil 1).** Zur Zeit $t=0$ sei folgendes Wellenpaket gegeben:

$$\Phi(x,0) = A\ \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0x\right). \tag{2}$$

a) Zeigen Sie qualitativ den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Lösung aus Aufgabe 2 und Gleichung (2). Berechnen Sie explizit die Wellenfunktion $\tilde{\Phi}(k)$ im Impulsraum.

b) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfuntion $\Phi(x,t)$. Skizzieren Sie $|\Phi(x,t)|^2$ als Funktion von x für verschiedene t und diskutieren Sie das Ergebnis.

c) In welchem Grenzfall erhalten Sie das monochromatische "Teilchen" aus Aufgabe 2 b)? Welcher physikalische Zusammenhang verbirgt sich hinter der Antwort?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Do., dem 15.5.03 —