Übungsblatt II Theoretische Physik D

Marco Schreck, Matrikelnummer: 1096937

0.1 Übungsblatt II

0.1.1 Aufgabe 1

a.)

Der Zustand eines Ψ-Feldes ist durch $\Psi(x, t = t_0)$ und $\partial_t \Psi(x,t)|_{t=t_0}$ festgelegt. Im eindimensionalen Fall ist dies die x-Koordinaten und die Zeit t. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet (nach Theorie C):

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \tilde{\Psi}(k,\omega) \exp\left(\mathrm{i}\left[kx - \omega t\right]\right)$$

Für die Funktion $\tilde{\Psi}(q,\omega)$, welche die Zwangsbedingung $q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ gilt also nach Aufgabenstellung:

$$\tilde{\Psi}(q,\omega) = \tilde{f}(\omega)\delta\left(q - \frac{\omega}{c}\right) + \tilde{q}(\omega)\delta\left(q + \frac{\omega}{c}\right)$$

Für die allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension haben wir:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}q \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(q,\omega) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx - \omega t\right]\right)\,\mathrm{d}\omega$$

Dann erhalten wir mit der obigen Darstellung:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}q \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\delta\left(q - \frac{\omega}{c}\right) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx - \omega t\right]\right)\,\mathrm{d}\omega + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega)\delta\left(q + \frac{\omega}{c}\right) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx - \omega t\right]\right)\,\mathrm{d}\omega\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi} \int \left[\tilde{f}(qc) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx - qct\right]\right) + \tilde{g}(qc) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx + qct\right]\right)\right]\,\mathrm{d}q}$$

b.)

$$\frac{\mathrm{d}\Psi(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}qc}{2\pi} \int \left[\tilde{g}(qc) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx + qct\right]\right) - \tilde{f}(qc) \exp\left(\mathrm{i}\left[qx - qct\right]\right)\right]\,\mathrm{d}q$$

Für die Anfangswerte gilt:

$$\Psi_0 = \Psi(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\tilde{g}(qc) + \tilde{f}(qc)\right] \exp\left(\mathrm{i}qx\right)$$

$$\partial\Psi_0 := \left.\frac{\mathrm{d}\Psi(x,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{i}qc}{2\pi} \int \left[\tilde{g}(qc) \exp\left(\mathrm{i}qx\right) - \tilde{f}(qc) \exp\left(\mathrm{i}qx\right)\right]\,\mathrm{d}q$$

Durch Fourierumkehrung erhalten wir dann folgendes lineare Gleichungssystem 2.Ordnung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi_0 \exp\left(-\mathrm{i}qx\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\tilde{g}(qc) + \tilde{f}(qc)\right]$$

$$\frac{-\mathrm{i}}{qc\sqrt{2\pi}} \int \partial\Psi_0 \exp\left(-\mathrm{i}qc\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\tilde{g}(qc) - \tilde{f}(qc)\right]$$

Daraus können nun jeweils durch Addition beziehungsweise durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen $\tilde{f}(qc)$ und $\tilde{g}(qc)$ bestimmt werden:

$$\boxed{\tilde{g}(qc) = \frac{1}{2} \int \left[\Psi_0 - \frac{\mathrm{i}}{qc}\partial\Psi_0\right] \exp\left(-\mathrm{i}qx\right)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\tilde{f}(qc) = \frac{1}{2}\int \left[\Psi_0 + \frac{\mathrm{i}}{qc}\partial\Psi_0\right]\exp\left(-\mathrm{i}qx\right)\,\mathrm{d}x}$$

Betrachten wir die angegebenen Anfangsbedingungen. Für die Θ-Funktion gilt:

$$\Theta(1-x^2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 1-x^2>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(1-x)(1+x) > 0$

Die Lösung dieser Ungleichung ist:

$1 + x > 0$ und $1 - x > 0$ oder

$1 + x < 0$ und $1 - x < 0$

Dies können wir auflösen nach x:

$x > -1$ und $x < 1$ oder

$x < -1$ und $x > 1$

Also erhalten wir:

$$\boxed{\Theta(1-x^2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -1<x<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Dammit folgt:

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\int \Theta(1-x^2)\exp(-\mathrm{i}qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\exp(-\mathrm{i}qx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2q\mathrm{i}}\left(\exp(-\mathrm{i}qx) - \exp(-\mathrm{i}qx)\right) =$$
$$= \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(\mathrm{i}qx) - \exp(-\mathrm{i}qx)\right) = \frac{\sin(qx)}{q} = \tilde{f}$$

Also erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int \left[\tilde{f}(qc)\exp\left(\mathrm{i}\left[qx-qct\right]\right) + \tilde{g}(qc)\exp\left(\mathrm{i}\left[qx+qct\right]\right)\right]\mathrm{d}q = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin(qx)}{q}\left[\exp\left(\mathrm{i}\left[qx-qct\right]\right) + \exp\left(\mathrm{i}\left[qx+qct\right]\right)\right]\mathrm{d}q = \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left[\Theta\left(1-(x-ct)^2\right) + \Theta\left(1-(x+ct)^2\right)\right]}\end{aligned}$$

Man hätte dies auch einfacher und schneller mit der d'Alembertschen Formel haben können (siehe HM4 oder Analysis III):

Es seien $g \in C^2$ und $h \in C^1$, dann gelten für

$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right)$ die Gleichungen:

1.) $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$ mit $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$

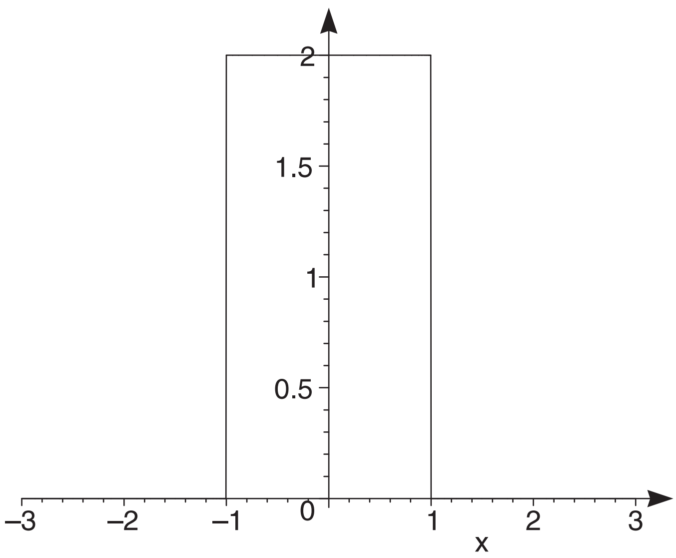
2.) $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

Dann erhalten wir sofort mit $g(x) = \Theta\left(1 - x^2\right)$ und $h(x) = 0$:

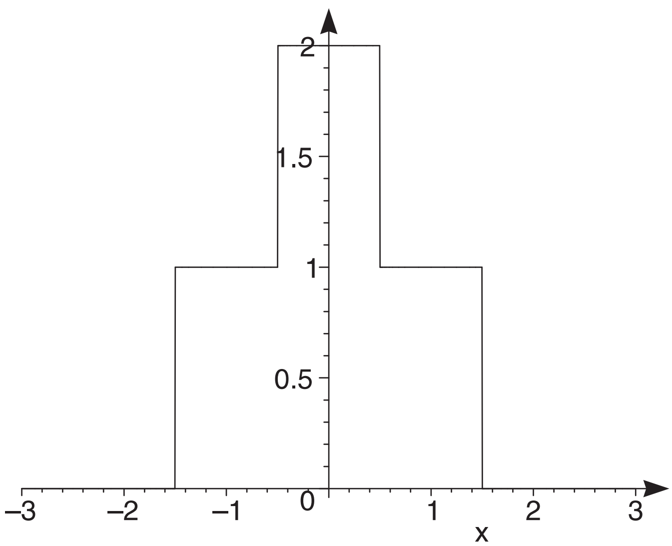
$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) = \\
&= \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} 0\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left[\Theta\left(1-(x+ct)^2\right) + \Theta\left(1-(x-ct)^2\right)\right] = \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left[\Theta\left(1-(x+ct)^2\right) + \Theta\left(1-(x-ct)^2\right)\right]}
\end{aligned}
$$

Wir zeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten:

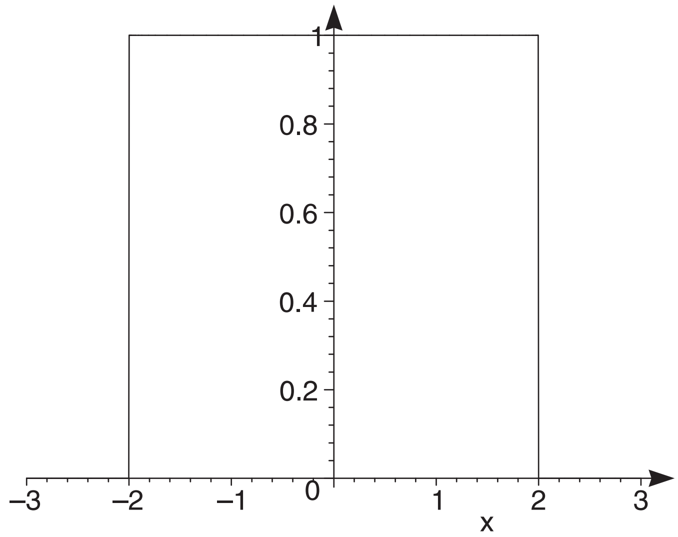
➢ $t = 0$



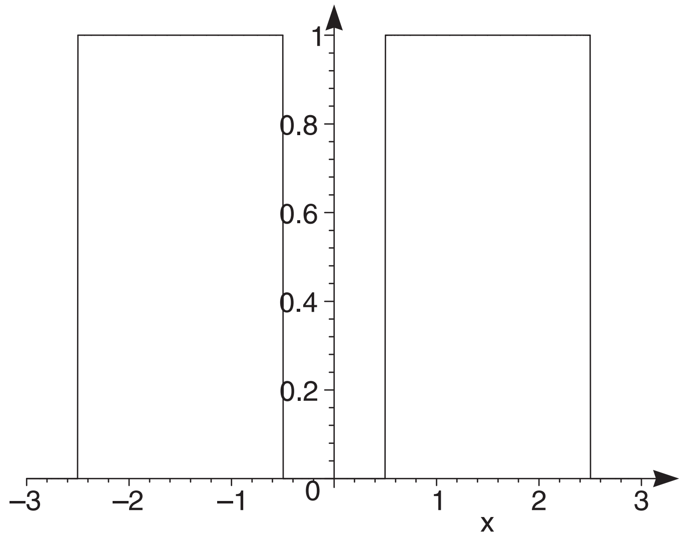
➢ $t = 0,5$



➢ $t = 1$



➢ $t = 1.5$



0.1.2 Aufgabe 2

a.)

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lautet:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

Wir nehmen wieder an, daß die allgemeine Lösung lautet:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\,\tilde{\Psi}(k,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega t\right]\right)$$

Durch Einsetzen, erhält man folgende algebraische Beziehung:

$$\mathrm{i}\hbar\cdot(-\mathrm{i}\omega) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2(\omega)$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2(\omega)$$

Durch Auflösen erhalten wir $k(\omega)$:

$$\boxed{k(\omega) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}}$$

Damit erhalten wir für die Phasengeschwindigkeit v_{ph}:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega^2}{2m\omega}} = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}}$$

Wir erhalten die Brechzahl $n(\omega)$:

$$n(\omega) = \frac{c}{v_{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}} = \boxed{c\sqrt{\frac{2m}{\hbar\omega}}}$$

Es ist zu zeigen, daß man dies auch aus der Wellengleichung aus Aufgabe 1 erhält für $c \mapsto \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}$:

$$\frac{1}{c^2} \mapsto \frac{2m}{\hbar\omega}$$

Durch Umformung der Wellengleichung folgt:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar\omega}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

Also haben wir folgende Zwangsbedingung (siehe Aufgabe 1):

$$k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$$

Damit ist auch $\tilde{\Psi}(k,\omega)$ darstellbar als:

$$\tilde{\Psi}(k,\omega) = \tilde{f}\delta\left(k - \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) + \tilde{g}\delta\left(k + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right)$$

Und wir erhalten somit eine Lösung wie in Aufgabe 1.

b.)

Es gibt hier nur eine Frequenz:

$$\Phi(x,t) = A \cdot exp\left(\mathrm{i}\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right) = A\exp\left(\mathrm{i}k_0\left(x - \frac{c}{n(\omega)}t\right)\right)$$

Damit folgt dann für die Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}} = \sqrt{\frac{\pi h}{m\omega}}$$

Dann war noch nach dem Erwartungswert von H gefragt:

$$\langle H\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi^\star(x)\hat{H}\Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^\star \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\left[k_0 x - \omega_0 t\right]\right) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(A\exp\left(\mathrm{i}\left[k_0 x - \omega_0 t\right]\right)\right)\mathrm{d}x$$

Daraus resultiert:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^\star\exp\left(-\mathrm{i}\left[k_0x - \omega_0 t\right]\right)\cdot(-k_0^2)\cdot A\exp\left(\mathrm{i}\left[k_0 x - \omega_0 t\right]\right)\mathrm{d}x = \frac{k_0^2\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A^\star A\cdot 1\,\mathrm{d}x = \frac{k_0^2\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A|^2 = \infty \text{ für } A \neq 0$$

Um dieses Dilemma zu beheben, macht man manchmal:

$$A^2\lim_{L\mapsto\infty}\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x = 1$$

$$A^2 \cdot L = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{1}{L}}}$$

Dies funktioniert, wenn L nicht unendlich ist. „Wenn man dies macht, vergißt man manchmal, daß man es gemacht hat“.

0.1.3 Aufgabe 3

a.)

Für ein Wellenpaket gilt:

$$\Psi(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Psi}(k)\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega t\right]\right)\,\mathrm{d}k$$

Für die Normierungskonstante A gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)=A^2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2a^2}}}=a\sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{2\pi}}}$$

Der zeitliche Verlauf eines Wellenpakets ist:

$$\Psi(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Psi}(k)\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega t\right]\right)\,\mathrm{d}k$$

$$\Psi(x,0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Psi}(k)\exp\left(\mathrm{i}kx\right)\,\mathrm{d}k$$

Durch Fourierumkehrung erhalten wir die Funktion $\tilde{\Phi}(k)$ im Impulsraum:

$$\tilde{\Phi}(k)=\frac{A}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2}+x\left(\mathrm{i}k_0-\mathrm{i}k\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a^2}}}\cdot\exp\left(-\frac{(k_0-k)^2}{4\cdot\frac{1}{4a^2}}\right)=\frac{A}{2\pi}\cdot 2a\sqrt{\pi}\exp\left[-a^2\left(k_0-k\right)^2\right]=$$
$$=\boxed{\frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-a^2\left(k_0-k\right)^2\right]}$$

b.)

- Elektromagnetische Welle

  Wir berechnen nun die allgemeine Wellenfunktion $\Phi(x,t)$ mittels erneuter Fouriertransformation. Für eine elektromagnetische Welle im Vakuum haben wir die Dispersionsrelation $\omega=ck$:

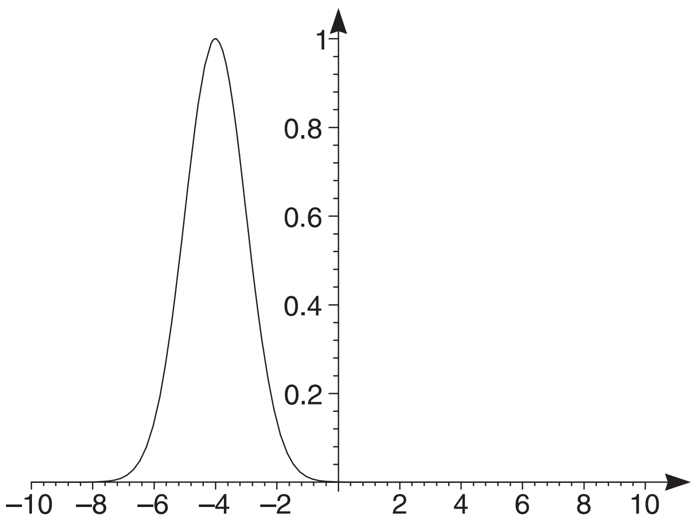
$$\Phi(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Phi}(k)\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega(k)t\right]\right)\,\mathrm{d}k=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-a^2\left(k_0-k\right)^2+\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kct\right]\,\mathrm{d}k=$$
$$=\frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-a^2k_0^2+2a^2k_0k-a^2k^2+\mathrm{i}kx-\mathrm{i}kct\right]\,\mathrm{d}k=$$
$$=\frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-a^2k^2+k\left(\mathrm{i}x-\mathrm{i}ct+2a^2k_0\right)-a^2k_0^2\right]\,\mathrm{d}k=$$
$$=\frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a^2}}\cdot\exp\left[\frac{-\left(x-ct\right)^2+4a^2k_0\left(x-ct\right)\mathrm{i}+4a^4k_0^2}{4a^2}-a^2k_0^2\right]=$$
$$=A\cdot\exp\left[-\left(\frac{x-ct}{2a}\right)^2+k_0\left(x-ct\right)\mathrm{i}\right]$$

Wir berechnen außerdem das Betragsquadrat der Funktion:

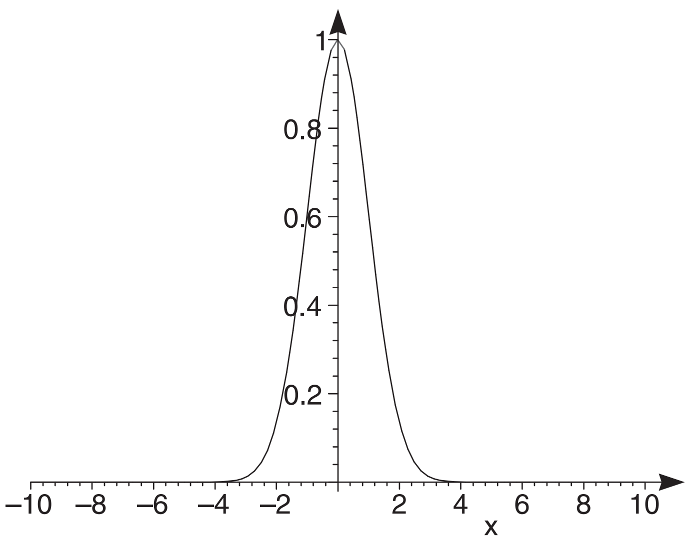
$$
\begin{aligned}
|\Phi(x,t)|^2 &= \left|A \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-ct}{2a}\right)^2 + k_0\,(x-ct)\,\mathrm{i}\right]\right|^2 = A^2\left|\exp\left[-\left(\frac{x-ct}{2a}\right)^2 + k_0\,(x-ct)\,\mathrm{i}\right]\right|^2 = \\
&= A^2\left|\exp\left[-\left(\frac{x-ct}{2a}\right)^2\right]\right|^2 \cdot \left|\exp\left[k_0\,(x-ct)\,\mathrm{i}\right]\right|^2 = \\
&= \boxed{A^2\exp\left[-2\left(\frac{x-ct}{2a}\right)^2\right]}
\end{aligned}
$$

Dies gilt, da der Betrag der komplexen Exponentialfunktion gleich Eins ist. Wir skizzieren die Funktion für verschiedene t. Im folgenden setzen wir dazu alle Konstante gleich 1:

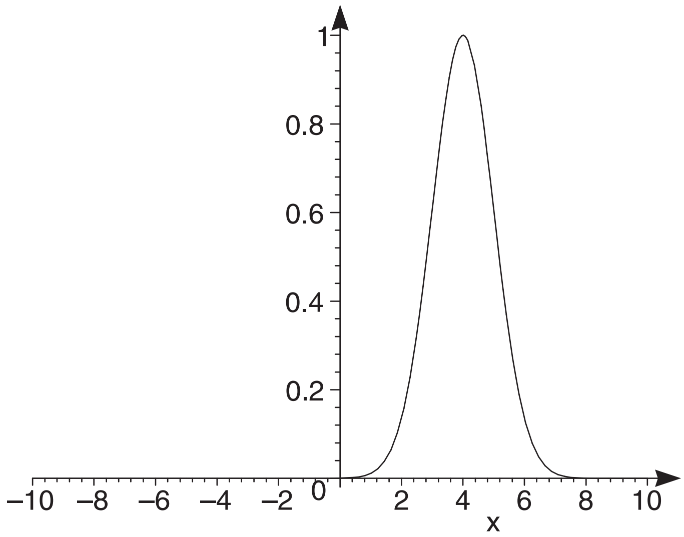
- $t = -3$



- $t = 0$



- $t = 3$



Das Wellenpaket behält also seine Form bei und wandert zeitlich von links nach rechts.

❦ Materiewelle

Hier haben wir die Dispersionsrelation (siehe Aufgabe 2):

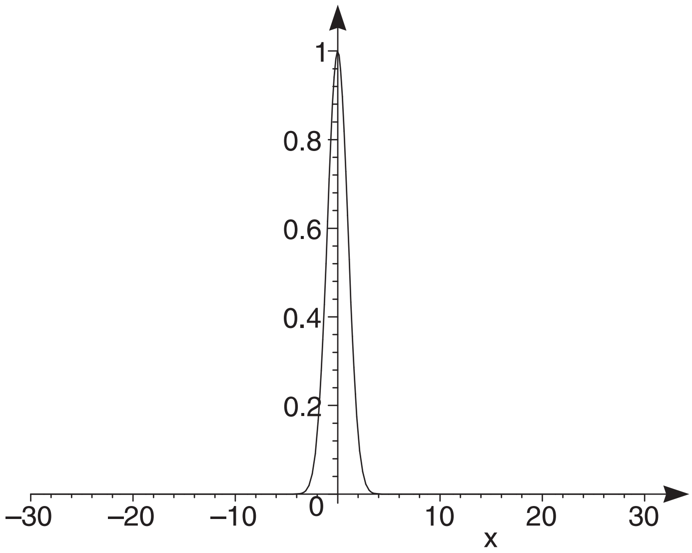
$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$$

Durch Einsetzen haben wir dann:

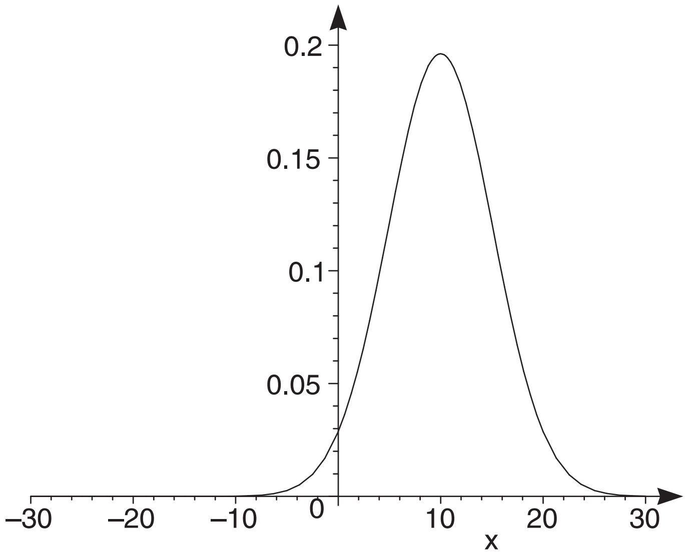
$$\begin{aligned}
\Phi(x,t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(k) \exp\left(\mathrm{i}\left[kx - \omega(k)t\right]\right)\,\mathrm{d}k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-a^2\left(k_0 - k\right)^2 + \mathrm{i}kx - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}k^2 t\right]\,\mathrm{d}k = \\
&= \frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-a^2k_0^2 + 2a^2k_0k - a^2k^2 + \mathrm{i}kx - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}k^2 t\right]\,\mathrm{d}k = \\
&= \frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-k^2\left(a^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t\right) + k\left(\mathrm{i}x + 2a^2k_0\right) - a^2k_0^2\right]\,\mathrm{d}k = \\
&= \frac{A\cdot a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t}} \cdot \exp\left[\frac{\left(\mathrm{i}x + 2a^2k_0\right)^2}{4\cdot\left(a^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t\right)} - a^2k_0^2\right] = \\
&= A\cdot a\cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t}} \cdot \exp\left[\frac{\left(\mathrm{i}x + 2a^2k_0\right)^2}{4\cdot\left(a^2 + \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}t\right)} - a^2k_0^2\right] =
\end{aligned}$$

Zeichnen wir das Quadrat der Welle, so erhalten wir:

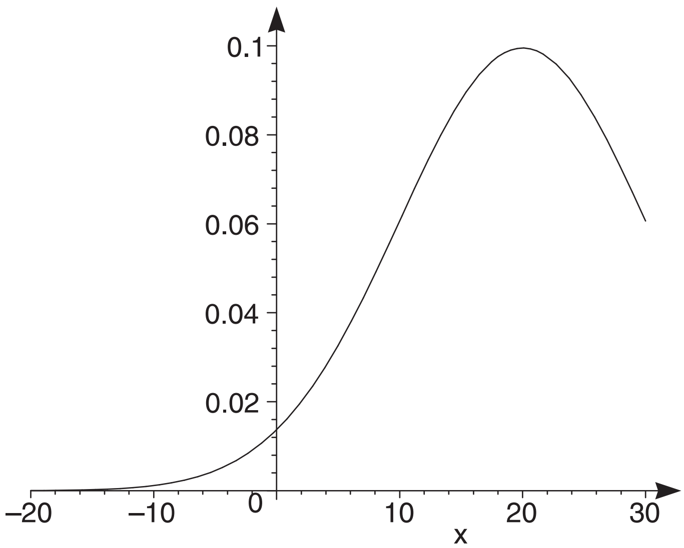
➢ $t = 0$



➢ $t = 5$



➢ $t = 6$



Wir erhalten also ein Wellenpaket, welches sich zeitlich nach rechts bewegt und das außerdem „zerfließt“.