Übungsblatt III Theoretische Physik D

Marco Schreck, Matrikelnummer: 1096937

0.1 Übungsblatt III

0.1.1 Aufgabe 1

a.)

Wir berechnen den Erwartungswert von x:

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \boxed{0}$$

$$\langle x^2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot a^3 = \boxed{\sqrt{2\pi}a^3}$$

Wir führen eine Rücktransformation in den k-Raum durch:

$$\tilde{\Phi}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,0)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}+\mathrm{i}x(k_0-k)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a^2}}}\exp\left(-\frac{(k_0-k)^2}{4\cdot\frac{1}{4a^2}}\right) =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2a\sqrt{\pi}}{1}\cdot\exp\left(-\frac{(k_0-k)^2}{\frac{1}{a^2}}\right) = A\sqrt{2}a\exp\left(-a^2(k_0-k)^2\right)$$

Damit ergibt sich für den Erwartungswert von k:

$$\langle k\rangle = A^2\left(\sqrt{2}a\right)^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k\exp\left(-2a^2(k_0-k)^2\right)\,\mathrm{d}k = A^2\cdot 2a^2\cdot\frac{k_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{a} = \boxed{\sqrt{2\pi}ak_0}$$

$$\langle k^2\rangle = A\cdot 2a^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2\exp\left(-2a^2(k_0-k)^2\right) = 2Aa^2\left[\frac{1}{2}\frac{k_0^2\sqrt{2\pi}}{a}+\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}\right] = \boxed{A\sqrt{2\pi}\left[ak_0^2+\frac{1}{4a}\right]}$$

b.)

Für eine Materiewelle haben wir folgende Dispersionsrelation:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$$

Wir berechnen daraus sowohl Phasen- als auch Gruppengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar}{2m}$$

$$v_{gr} = \frac{\partial\omega(k)}{\partial k} = \frac{\hbar}{m}$$

Es gilt also:

$$\boxed{v_{gr} = 2v_{ph}}$$

Außerdem ergibt sich für die de-Broglie Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi h}{m\omega}}}$$

0.1.2 Aufgabe 2

a.)

Wir müssen die Funktionen zuerst normieren:

$$\Psi_0(x) = N_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_0(x) = N_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0|^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Daraus folgt dann:

$$\boxed{N_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

$$\Psi_1(x) = 2x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_1|^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 4x^2 \exp\left(-x^2\right) \,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}$$

Also erhalten wir hier:

$$\boxed{N_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}}$$

Nun können wir die gesamte Funktion normieren. Da es sich um reelle Funktionen handelt, folgt:

$$|\Psi|^2 = \Psi^2 = N^2\left[\Psi_0^2 + 2\Psi_0\Psi_1 + \Psi_1^2\right]$$

$$N^2\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^2 + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0\Psi_1\right] = N^2\left[1+1+0\right] = 2N^2 \overset{!}{=} 1$$

Daraus folgt dann natürlich:

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Für die zeitliche Entwicklung können wir einfach unter Verwendung der Eigenwerte für die Energie schreiben:

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_1(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_0}{\hbar}t\right) + \Psi_1(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_1}{\hbar}t\right)\right] \text{ mit } E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \text{ und } E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_1(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}t\right) + \Psi_2(x)\exp\left(-\frac{3\mathrm{i}\omega}{2}t\right)\right]}$$

b.)

Wie berechnen zuerst die Wahrscheinlichkeitsdichte des Ortes:

$$\begin{aligned} W(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)\Psi^\star(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\Psi_0\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}t\right) + \Psi_1\exp\left(-\frac{3\mathrm{i}\omega}{2}t\right)\right]\cdot\left[\Psi_0\exp\left(+\frac{\mathrm{i}\omega}{2}t\right) + \Psi_1\exp\left(+\frac{3\mathrm{i}\omega}{2}t\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\Psi_0^2 + \Psi_0\Psi_1\exp\left(\mathrm{i}\omega t\right) + \Psi_0\Psi_1\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) + \Psi_1^2\right] = \frac{1}{2}\left[\Psi_0^2 + \Psi_1^2 + \Psi_0\Psi_1\left(\exp\left(\mathrm{i}\omega t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)\right)\right] = \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left[\Psi_0^2 + \Psi_1^2 + 2\Psi_0\Psi_1\cos(\omega t)\right]} \end{aligned}$$

Daraus können wir dann direkt den Eigenwert des Ortes berechnen:

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x,t)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 4x^3\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x + \cos(\omega t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 0 + 0 + \sqrt{\pi}\cos(\omega t) = \boxed{\sqrt{\pi}\cos(\omega t)}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Ortes oszilliert mit der Frequenz ν:

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi}}$$