Übungsblatt Nr. 5 zur Theorie D:

Operator-Algebra

1 Auf- und Absteigeoperatoren. Gegeben ist ein linearer harmonischer Oszillator im Zustand $\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \Psi_0(x) + e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \Psi_1(x) \right)$, wobei $\Psi_n(x)$ die in der Vorlesung angegebenen orthonormierten Energie-Eigenzustände sind mit Energie-Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}^\dagger \Psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \alpha_{n+1} \Psi_{n+1}(x)$$

ist, wobei $\xi = x/\lambda$ und $\lambda = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Geben Sie α_{n+1} an. (Hinweis: Für $n = 0$ und $n = 1$ haben Sie diese Aufgabe bereits auf Blatt 3 bearbeitet.)

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a} \Psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \alpha_n \Psi_{n-1}(x)$$

ist, und geben Sie α_n an. Benutzen Sie dafür die Rekursionsformel $H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$ für die Hermite-Polynome. Was passiert für $\hat{a} \Psi_0(x)$?

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle(t)$ und $\langle \hat{p} \rangle(t)$ für das System im gegebenen Zustand $|\Psi(t)\rangle = |\frac{U_0(t)}{\sqrt{2}}\Psi_0\rangle + |\frac{U_1(t)}{\sqrt{2}}\Psi_1\rangle$, indem Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ ausdrücken. Vergleichen Sie mit Aufgabe 2 auf Blatt 3. Welche Bedeutung hat der Operator $\hat{a}^\dagger \hat{a}$?

d) * Freiwillige Zusatzaufgabe: Beweisen Sie die Gültigkeit der Rekursionsformel aus Aufgabenteil b).

2 Drehimpulsalgebra. Man berechne die folgenden Kommutatoren für die Komponenten des Drehimpulses $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$:

a) $[\hat{L}_j, \hat{x}_k], [\hat{L}_j, \hat{p}_k], [\hat{L}_j, \hat{L}_k]$ mit $j, k \in \{x, y, z\}$

b) Zeigen Sie für ein freies Teilchen, dass

$$[\hat{H}, \hat{L}_j] = 0, \quad [\hat{H}, |\hat{\mathbf{L}}|^2] = 0, \quad [|\hat{\mathbf{L}}|^2, \hat{L}_j] = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die algebraischen Rechenregeln für Kommutatoren.

Welcher Satz involutorischer Observabler ergibt sich daraus?

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$ und $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$ für die Operatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$. Es sei Φ_m Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ mit $\hat{L}_z \Phi_m = \hbar m \Phi_m$. Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ zu den Funktionen $\Phi_m^\pm = \hat{L}_\pm \Phi_m$ ausschließlich mit Hilfe der Kommutatoren. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.