

ÜBUNGSBLATT V THEORETISCHE PHYSIK D

MARCO SCHRECK, MATRIKELNUMMER: 1096937

0.1 Übungsblatt V

0.1.1 Aufgabe 1

a.)

Die $\Psi_n(x)$ lauten nach der Vorlesung:

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) \text{ mit } \xi = \frac{x}{\lambda} \text{ und } \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Die hermiteschen Polynome $H_n(\xi)$ dazu lauten:

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2)$$

Wir berechnen als erstes:

$$\xi \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \cdot \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \cdot \left[(-1)^n \xi \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2) - (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} \exp(-\xi^2) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \cdot \left[(-1)^n \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) - \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n+1}(\xi) \right] \end{aligned}$$

Also folgt damit:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n!2^{n+1}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n+1}(\xi)$$

$$\Psi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{(n+1)!2^{n+1}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n+1}(\xi)$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n}{\Psi_{n+1}} = \boxed{\sqrt{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}(x)}$$

b.)

Analog zu Aufgabenteil a.) gilt nun hier:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} (-1)^n \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n+1}(\xi)$$

Es gilt der Hinweis auf dem Übungszettel für die hermiteschen Polynome:

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi)$$

Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} (-1)^n \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) - \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \cdot 2\xi H_n(\xi) + \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n-1}(\xi) \end{aligned}$$

Für Ψ_{n-1} können wir schreiben:

$$\Psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)! 2^{n-1}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_{n-1}(\xi)$$

Also gilt hiermit:

$$\alpha_{n-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n}{\Psi_{n-1}} = \boxed{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_n(x) = \sqrt{n} \Psi_{n-1}(x)}$$

Ψ_0 berechnet sich einfach nach der Formel:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

Damit folgt durch Anwendung des Operators $\hat{a}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\pi}} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) = \boxed{0}$$

c.)

Wir drücken als erstes $\hat{x}$ und $\hat{p}$ als $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ aus:

☞ Addition der Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\hbar}} \sqrt{m\omega} \hat{x} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) = \boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})}$$

☞ Subtraktion der Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\hbar}} \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} = \hat{a} - \hat{a}^\dagger$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot \hbar (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \boxed{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{\lambda} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})}$$

Es gilt für die zeitabhängige Wellenfunktion des harmonischen Oszillators:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_0(x) \exp\left(-i \frac{E_0}{\hbar} t\right) + \Psi_1(x) \exp\left(-i \frac{E_1}{\hbar} t\right) \right]$$

Dann berechnen wir den Erwartungswert folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \hat{x} \Psi_0(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \hat{x} \Psi_1(x) dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \hat{x} \Psi_1(x) dx \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t\right) + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \hat{x} \Psi_0(x) dx \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \hat{x} \Psi_0(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \hat{x} \Psi_1(x) dx + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(x) \hat{x} \Psi_1(x) dx \right] \cos\left(\frac{E_0 - E_1}{\hbar} t\right) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die einzelnen Integrale mittels $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \hat{x} \Psi_0 dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \Psi_0 dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\hat{a}^\dagger \Psi_0 + \hat{a} \Psi_0] dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\Psi_1 + 0] dx = \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_1 dx = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \hat{x} \Psi_1 dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\hat{a}^\dagger \Psi_1 + \hat{a} \Psi_1] dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\sqrt{2} \Psi_2 + \Psi_0] dx = \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \Psi_2 dx + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_1 dx = 0 + 0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \Psi_1 dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\hat{a}^\dagger \Psi_1 + \hat{a} \Psi_1] dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\sqrt{2} \Psi_2 + \Psi_0] dx = \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_2 dx + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_0 dx = \boxed{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Also erhalten wir für den Erwartungswert des Ortes in Abhängigkeit von der Zeit t

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)}$$

Außerdem berechnen wir den Erwartungswert des Impulses:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \hat{p} \Psi_0(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \hat{p} \Psi_1(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^*(x) \hat{p} \Psi_1(x) dx \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t\right) + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x) \hat{p} \Psi_0(x) dx \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_1) t\right) = \end{aligned}$$

Wir berechnen nun wieder die einzelnen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \hat{p} \Psi_0 dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\hat{a}^\dagger \Psi_0 - \hat{a} \Psi_0] dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\Psi_1 - 0] dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_1 dx = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \hat{p} \Psi_1 dx &= \frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\hat{a}^\dagger \Psi_1 - \hat{a} \Psi_1] dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\sqrt{2} \Psi_2 - \Psi_0] dx = \\ &= \frac{i\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \Psi_2 dx - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_1 dx = 0 - 0 = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\hat{a}^\dagger - \hat{a}] \Psi_1 dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [\sqrt{2} \Psi_2 - \Psi_0] dx = \frac{i\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_2 dx - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \Psi_0 dx = \boxed{-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda}}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\hat{a}^\dagger - \hat{a}] \Psi_0 dx = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 [\Psi_1 - 0] dx = +\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \Psi_1 dx = \boxed{+\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\lambda}}$$

Also ergibt sich daraus:

$$\langle p \rangle(t) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}\lambda} \left(-\exp\left(\frac{i(E_0 - E_1)}{\hbar} t\right) + \exp\left(-\frac{i(E_0 - E_1)}{\hbar} t\right) \right) = \boxed{-\frac{\hbar}{\sqrt{2}\lambda} \sin(\omega t)}$$

Bei Vergleich mit Aufgabe 2 auf Blatt 3 erkennt man eine Übereinstimmung der Ergebnisse!