Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Ralph Werner 5.6.03
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre werner@tkm.uni-karlsruhe.de

# Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie D: Drehimpulse/Separationsansatz

**1** Ein **Kugelkreisel** mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2\Theta}$, wobei $\Theta$ das Trägheitsmoment bezeichnet, befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$\Psi(\vartheta, \phi, t = 0) = N \left( \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,1}(\vartheta, \phi) + Y_{1,0}(\vartheta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,-1}(\vartheta, \phi) \right).$$

**a)** Bestimmen Sie die Normierungskonstante $N$. Ist $\Psi(\vartheta, \phi, 0)$ Eigenfunktion zu $\hat{H}$, $\hat{L}_z$? Wie lautet die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion?

**b)** Ist $\Psi(\vartheta, \phi, 0)$ Eigenfunktion zu $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$?

**c)** Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ und $\hat{L}^2$.

(*Hinweis*: Die Rechnungen beschränken sich auf den Raum der Funktionen $Y_{1,m}$ mit $m = -1, 0, 1$. Sie können daher ausnutzen, dass ein Operator $\hat{O}$ angewandt auf die Wellenfunktion wieder eine Linearkombination $\hat{O}\Psi = a_1 Y_{1,1} + a_0 Y_{1,0} + a_{-1} Y_{1,-1}$ liefert, wobei die Koeffizienten $a_m$ zu bestimmen sind. Nutzen Sie ferner die Orthonormiertheit der $Y_{l,m}$ - es braucht dann kein Integral explizit ausgerechnet zu werden.)

**2** Gegeben sei ein geladenes **Teilchen in einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$** mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$.

**a)** Wie lautet der Hamiltonoperator $\hat{H}$? Welche der folgenden Größen sind erhalten: $\hat{H}$, $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$?

**b)** Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes $\psi(x, y, z) = \exp\{i(k_y y + k_z z)\}\ \phi(x)$, wobei $k_x$ und $k_y$ Konstanten sind, die Energie-Eigenzustände und Energie-Eigenwerte.

**3** **Teilchen in einer Kugel.** Gegeben sei ein Teilchen in einem sphärischen Potentialtopf der Form

$$V(|\boldsymbol{r}| \equiv r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq r_0 \\ \infty & \text{für } r > r_0. \end{cases}$$

**a)** Wie lautet die Differentialgleichung und deren Randbedingungen, die den Radialanteil der Wellenfunktion $u(r) = rR(r)$ determinieren? Lösen Sie die Differentialgleichung für $l = 0, 1$ mit dem Ansatz $u(r) \to \tilde{j}_l(\kappa r) = a \sin(\kappa r) + b\,[(\kappa r)^{-1} \sin(\kappa r) - \cos(\kappa r)]$ und geben Sie die erlaubten Energie-Eigenwerte an. Warum muss notwendiger Weise gelten $\lim_{r\to 0} u(r) = 0$?

**b)** * Freiwillige Zusatzaufgabe: Auf welche Differentialgleichung führt Sie die Substitution $u(r) = \sqrt{r}\, w(r)$? Wie lautet folglich die Lösung für beliebige $l$?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Do., dem 12.6.03 —