Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz , Dr. Ralph Werner 12.6.03
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre werner@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 7 zur Theorie D: Entartung

Schriftlich, Abgabe bis Fr., dem 20.6.03 um 7:50 Uhr, im Kasten im Foyer des Physikhochhauses.
Bitte markieren Sie **deutlich Gruppennummer und Übungsleiter** auf Ihrer Lösung.
Rückgabe in den Übungen am 26.6.03.

$\boxed{1}$ **Teilchen im Kubus.** Gegeben sei ein Teilchen der Masse $\tilde{m}$ in einem Kubus, der durch ein Potential der Form

$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \text{ und } 0 < y < a \text{ und } 0 < z < a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird. Der Hamiltonoperator lässt sich als Summe nichtwechselwirkender Teilsysteme auffassen: $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\tilde{m}} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$ für $0 < x, y, z < a$.

a) Zeigen Sie, dass die Energie-Eigenzustände als Produkt $\Phi_{i,j,k}(x, y, z) = \Phi_i(x)\ \Phi_j(y)\ \Phi_k(z)$ mit $i, j, k = 1, 2, 3, \ldots$ darstellbar sind, wobei $\Phi_i(x)$ usw. die stationären Wellenfunktionen eines Teilchens im eindimensionalen Kasten bezeichnen.

b) Welche Energie-Eigenwerte und Entartungen ergeben sich für die ersten 6 Energieniveaus?

$\boxed{2}$ **Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator**
mit Potential $V(\boldsymbol{r}) = \frac{\tilde{m}\omega}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

a) In kartesischen Koordinaten lässt sich die Wellenfunktion als Produkt $\Psi_{i,j,k}(x, y, z) = \Psi_i(x)\ \Psi_j(y)\ \Psi_k(z)$ schreiben, wobei $\Psi_i(x)$ usw. die stationären Oszillator-Wellenfunktionen beschreiben (siehe Kap. II.5 der Vorlesung). Wie lauten die zugehörigen Energie-Eigenwerte $E_{i,j,k}$? Skizzieren Sie das Energietermschema und geben Sie die zugehörige Entartung an. (*Hinweis*: Auf wieviele Arten lässt sich die natürliche Zahl $n = i + j + k$ aus $i, j, k = 0, 1, 2, \ldots$ darstellen?)

b) Schreiben Sie die Wellenfunktionen der ersten beiden Energieniveaus explizit auf. Durch geeignete Linearkombinationen von Wellenfunktionen (à la $\Psi_{1,0,0} \pm i\,\Psi_{0,1,0}$ usw.) zu *entarteten* Energieniveaus lassen sich simultane Eigenfunktionen von $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ konstruieren. Klassifizieren Sie auf diese Weise die Zustände nach den zugehörigen Quantenzahlen n, l und m. Benutzen Sie dabei die Tabelle der Kugelfunktionen aus der Vorlesung. (*Hinweis*: Verschwenden Sie dabei keine sonderliche Mühe auf die Normierungsfaktoren der Kugelfunktionen und Hermite-Polynome. Benutzen Sie dimensionslose Größen für x, y und z!)

c) Klassifizieren Sie auch das dritte Energieniveau gemäß Aufgabenteil b).

— Besprechung in der **Vorlesung** am Fr., dem 20.6.03 —