Übungsblatt Nr. 8 zur Theorie D:**Optische Auswahlregeln**

- 1** **Feinstruktur-Konstante.** Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{v}^2 \rangle / c^2 = \alpha^2$ bezüglich des Grundzustandes des Wasserstoffatoms, wobei $\hat{v} := \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}]$ der Geschwindigkeitsoperator und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Welchen Zahlenwert hat die dimensionslose Konstante α ?
- 2** **Spektrallinien des Wasserstoffatoms.** Die Übergangsraten (relativen Intensitäten) für die elektrischen Dipolübergänge sind in der Vorlesung hergeleitet worden als $\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2\omega^3}{3c^3\hbar} (|x_{fi}|^2 + |y_{fi}|^2 + |z_{fi}|^2)$, wobei τ die mittlere Lebensdauer und $x_{fi} = \langle f|x|i \rangle$ etc. ist.
- a) Berechnen Sie die Übergangsraten für die elektrischen Dipolübergänge von $n = 2, l = 1, m = -1, 0, 1$ zum Grundzustand $n = 1$.
- b) Wie ist das Licht in den verschiedenen Übergängen polarisiert? Was ändert sich in Gegenwart eines (kleinen) homogenen äußeren Magnetfeldes?
- c) Das Wasserstoffatom befinde sich in einem (kleinen) homogenen äußeren Magnetfeld. Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm für die Zustände mit $n = 1, 2, 3$. Tragen Sie die möglichen (Dipol-erlaubten) Übergänge zwischen den Zuständen $n = 3$ und $n = 2$ ein. Wie ist die Strahlung polarisiert?
- d) * Freiwillige Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass es von $n = 2, l = 0$ in keiner Multipolordnung Übergänge nach dem Grundzustand geben kann.
- 3** **Auswahlregeln in anderen Systemen.** Welche Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung (d.h. für welche Anfangs-/Endzustände ist $\langle f|x|i \rangle = 0$) ergeben sich für die Systeme
- a) Teilchen im Kasten (mit unendlich hohen Potentialwänden),
- b) harmonischer Oszillator (*Hinweis:* Verwenden Sie die Rekursionsformel von Blatt 5).
- 4** **Lineare Operatoren im Hilbertraum.** Zeigen Sie, dass
- für die Adjungierte eines Produkts zweier Operatoren gilt $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$,
 - die Eigenwerte eines unitären Operators vom Betrag eins sind.