Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Ralph Werner 26.6.03
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre werner@tkm.uni-karlsruhe.de

# Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie D: Formalismus der Quantenmechanik

$\boxed{1}$ **Eigenschaften kanonischer Operatoren.** Gegeben sei ein (eindimensionales) System mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, wobei $\hat{p}$ und $\hat{x}$ kanonische Operatoren sind, d.h. $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$. Zeigen Sie durch Benutzen des Kommutators $[\hat{H}, \hat{x}]$, dass sich die Orts- und Impulsmatrixelemente $\langle\psi_\mathrm{f}|\hat{x}|\psi_\mathrm{i}\rangle$ und $\langle\psi_\mathrm{f}|\hat{p}|\psi_\mathrm{i}\rangle$ ineinander umrechnen lassen. ($\psi_\mathrm{f}$ und $\psi_\mathrm{i}$ bezeichnen Energieeigenzustände zu $E_\mathrm{f}$ und $E_\mathrm{i}$.)

$\boxed{2}$ **Translationsoperator.** Gegeben ist der Operator $\hat{T}_a = \mathrm{e}^{ia\hat{p}/\hbar}$, wobei $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ der Impulsoperator und $a$ ein Parameter ist. Untersuchen Sie die Wirkung von $\hat{T}_a$ auf eine beliebige Wellenfunktion $\Psi(x)$, d.h. $\hat{T}_a\Psi(x) \to \Phi(x)$, indem Sie

**a)** $\hat{T}_a$ über die Taylorreihe der Exponentialfunktion erklären und Term für Term auf $\Psi(x)$ anwenden,

**b)** $\Psi(x)$ nach Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ von $\hat{p}$ entwickeln und die Anwendung einer Funktion eines Operators $f(\hat{p})$ auf eine Eigenfunktion des letzteren als $f(\hat{p})\phi_k(x) = f(\hbar k)\phi_k(x)$ definieren.

**c)** Ist $\hat{T}_a$ hermitesch? Ist $\hat{T}_a$ unitär? Wie lautet der zu $\hat{T}_a$ reziproke Operator?

**d)** $\Psi$ sei Eigenfunktion von $\hat{A}$ mit $\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$. Zeigen Sie, dass $\Psi$ auch Eigenfunktion von $\hat{A}^n$ ist. Zeigen Sie, dass $f(\hat{A})|\Psi\rangle = f(a)|\Psi\rangle$ allgemein gilt, wenn man $f(\hat{A})$ über seine Taylorreihe definiert.

$\boxed{3}$ **Faltung.** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte (FT) des Produkts $V(x)\Psi(x)$ in die Faltung übergeht:

$$V(x)\Psi(x) \xrightarrow{\text{FT}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(p-p')\tilde{\Psi}(p')\, dp' .$$

— Besprechung in den Übungsgruppen am Do., dem 3.7.03 —