# Übungsblatt IX Theoretische Physik D

Marco Schreck, Matrikelnummer: 1096937
Gruppe 5, Suresh Pereira

## 0.1 Übungsblatt IX

### 0.1.1 Aufgabe 1

Die jeweiligen Matrixelemente sind folgendermaßen definiert:

$$\langle\Psi_f|\hat{x}|\Psi_i\rangle = \int \Psi_f^\star \hat{x}\Psi_i \,\mathrm{d}x$$

$$\langle\Psi_f|\hat{p}|\Psi_i\rangle = \int \Psi_f^\star \hat{p}\Psi_i \,\mathrm{d}x$$

Wir berechnen nun zuerst den Kommutator $[\hat{H},\hat{x}]$ unter Verwendung der auf dem Übungszettel angegebenen Beziehungen:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}),\ [\hat{p},\hat{x}] = -\mathrm{i}\hbar$$

Damit folgt:

$$[\hat{H},\hat{x}]|\Psi_i\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}),\hat{x}\right]|\Psi_i\rangle = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2,\hat{x}\right]|\Psi_i\rangle + [V(\hat{x}),\hat{x}]|\Psi_i\rangle = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{-\mathrm{i}\hbar} + \underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{-\mathrm{i}\hbar}\hat{p}\right)|\Psi_i\rangle + [V(\hat{x}),\hat{x}]|\Psi_i\rangle =$$

$$\frac{1}{2m}\left(-2\mathrm{i}\hbar\hat{p} + V(\hat{x})\hat{x} - \hat{x}V(\hat{x})\right)|\Psi_i\rangle = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\hat{p}|\Psi_i\rangle$$

Dabei wurde verwendet, daß $V(\hat{x})\hat{x} - \hat{x}V(\hat{x}) = V(x)\cdot x - x\cdot V(x) = 0$ ist. Nun lösen wir nach $\hat{p}$ auf und setzen den Ausdruck in das Impulsmatrixelement ein. Dieses wird dann soweit umgeformt, bis sich ein Ausdruck mit $\hat{x}$ ergibt:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_f|\hat{p}|\Psi_i\rangle &= \left\langle\Psi_f\right| - \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H},\hat{x}]\left|\Psi_i\right\rangle = \left\langle\Psi_f\right| - \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\left(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\right)\left|\Psi_i\right\rangle = \left\langle\Psi_f\right| - \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\hat{x} + \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{x}\hat{H}\left|\Psi_i\right\rangle = \\ &= \left\langle\Psi_f\right| - \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\hat{x}\left|\Psi_i\right\rangle + \left\langle\Psi_f\right|\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{x}\hat{H}\left|\Psi_i\right\rangle = \left\langle\Psi_f\right|\hat{H}\left(-\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\right)\hat{x}\left|\Psi_i\right\rangle + \left\langle\Psi_f\right|\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{x}E_i\left|\Psi_i\right\rangle = \\ &= \left\langle\Psi_f\right|E_f\left(-\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\right)\hat{x}\left|\Psi_i\right\rangle + \left\langle\Psi_f\right|\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\hat{x}E_i\left|\Psi_i\right\rangle = \boxed{\left\langle\Psi_f\right|\hat{x}\left(\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}E_i - \frac{m}{\mathrm{i}\hbar}E_f\left|\Psi_i\right\rangle\right)\right\rangle}\end{aligned}$$

In der vorletzten/letzten Zeile wurde die Hermitizität des Hamilton-Operators ausgenutzt. Damit ist gezeigt, daß sich Impuls- und Ortsmatrixelemente ineinander umrechnen lassen.

### 0.1.2 Aufgabe 2

**a.)**

Wir entwickeln den Operator in eine Taylorreihe:

$$\hat{T}_a = \exp\left(\mathrm{i}a\hbar\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{\hbar}\right) = \exp\left(a\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

Durch Anwendung des Operators auf die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ergibt sich:

$$T_a\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot a\right)^k\Psi(x) = \Psi(x+a)$$

Dies ist die Taylorreihe einer um $a$ verschobenen Funktion $\Psi(x)$. Siehe dazu Gelbes Rechenbuch (Taylorreihe), Seite 83:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{h}\right)^k f(\vec{x})$$

Es handelt sich also um einen sogenannten Verschiebungsoperator, welcher die $x$-Koordinate um $a$ verschiebt:

**b.)**

Die Impulseigenfunktionen lauten allgemein:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{p}{\hbar} \cdot x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}kx)$$

Wir entwickeln also $\Psi(x)$ in Eigenfunktionen:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\mathrm{i}kx)$$

Durch Anwenden des Operators auf die Wellenfunktion gilt:

$$\hat{T}_a(\hat{p})\Psi(x) = f(\hat{p}) \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$$

Dann kann $f(\hat{p})$ – da von $k$ unabhängig – in das Integral gezogen werden:

$$f(\hat{p}) \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\hat{p})\phi_k(x)$$

Und außerdem folgt mit der so auf dem Übungszettel definierten Anwendung einer Funktion eines Operators $\hat{p}$ auf die Eigenfunktion dieses Operators:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\hat{p})\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f(\hbar k) \exp(\mathrm{i}kx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\mathrm{i}ka) \cdot \exp(\mathrm{i}kx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\mathrm{i}k(x+a)) = \Psi(x+a)$$

Damit ist auch wieder gezeigt, daß der Operator eine Verschiebung der $x$-Koordinate um $a$ erzeugt.

**c.)**

$$\hat{T}_a = \exp\left(\mathrm{i}\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)$$

Wir interessieren uns für $\hat{T}_a^\dagger$:

$$\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ \hat{p}^\dagger = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}^\dagger$$

$$\hat{T}_a^\dagger = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)$$

Damit gilt $\hat{T}_a \neq \hat{T}_a^\dagger$, womit der Operator also nicht hermitesch ist. Der Umkehroperator lautet:

$$\hat{T}^{-1}(a) = \exp\left(-\mathrm{i}a\frac{\hat{p}}{\hbar}\right)$$

Dies ist plausibel, denn eine Verschiebung um $a$ wird gerade durch eine Verschiebung um $-a$ wieder umgekehrt.

$$\hat{T}_a\hat{T}_a^\dagger = \hat{T}_a^\dagger\hat{T}_a = \exp\left(\mathrm{i}\frac{a}{\hbar}\hat{p} - \mathrm{i}\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right) = 1$$

Damit ist $\hat{T}_a$ unitär und $\hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_a^\dagger$ der reziproke Operator zu $\hat{T}_a$.

**d.)**

Es gilt die Eigenwertgleichung:

$$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$$

Durch $n$-maliges Anwenden des Operators $\hat{A}$ auf diese Gleichung erhalten wir:

$$\hat{A}^2|\Psi\rangle = \hat{A}a|\Psi\rangle = a\hat{A}|\Psi\rangle = a^2|\Psi\rangle$$

$$\hat{A}^3|\Psi\rangle = \hat{A}a^2|\Psi\rangle = a^2\hat{A}|\Psi\rangle = a^3|\Psi\rangle$$

$\vdots$

$\hat{A}^n|\Psi\rangle = \hat{A}a^{n-1}|\Psi\rangle = a^{n-1}\hat{A}|\Psi\rangle = a^n$

Wir notieren uns die Taylorreihe der Funktion $f(\hat{A})$:

$$f(\hat{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\hat{A}^k$$

Angewendet auf $|\Psi\rangle$ ergibt sich:

$$f(\hat{A})|\Psi\rangle = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\hat{A}^k\right]|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\hat{A}^k|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}a^k|\Psi\rangle = f(a)|\Psi\rangle$$

### 0.1.3 Aufgabe 3

Wir berechnen die Fouriertransformierte des Produkts:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(V(x)\Psi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(x)\Psi(x)\exp(\mathrm{i}px)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(p^\star)\exp(-\mathrm{i}xp^\star)\,\mathrm{d}p^\star \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(p')\exp(-\mathrm{i}xp')\,\mathrm{d}p'\right]\exp(\mathrm{i}px)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(p^\star)\tilde{\Psi}(p')\exp(-\mathrm{i}xp' - \mathrm{i}xp^\star)\,\mathrm{d}p^\star\,\mathrm{d}p'\right]\exp(\mathrm{i}px)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{V}(p^\star)\Psi(p') \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(\mathrm{i}x(p - p' - p^\star))\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}p^\star\mathrm{d}p'
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Fouriertransformierte der $\delta$-Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(k)\exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Dazu führen wir die Umkehrtransformation durch:

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x$$

Angewendet auf obige Funktion folgt:

$$\mathcal{F}(V(x)\Psi(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(p^\star)\Psi(p')\delta(p - p' - p^\star)\,\mathrm{d}p^\star\mathrm{d}p' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(p - p')\tilde{\Psi}(p')\,\mathrm{d}p'$$