Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz , Dr. Ralph Werner 3.7.03
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre werner@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie D: Matrixdarstellung

1 **Matrixdarstellung des harmonischen Oszillators** in der Basis der stationären Zustände.

a) Benutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a (Vorlesung Seite III-17 und Übungsblatt 5 Aufgabe 1), um die Matrixdarstellung von $\hat{H}$, $\hat{x}$ und $\hat{p}$ in der Basis der stationären Zustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators $|n\rangle$ herzuleiten.

b) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ an.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) die Erwartungswerte von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ sowie deren Varianzen im n-ten stationären Zustand.

2 **Spin-1/2 System.** Der Spinoperator in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ lautet $\hat{\sigma}_n = \boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = n_x\hat{\sigma}_x + n_y\hat{\sigma}_y + n_z\hat{\sigma}_z$, wobei die Matrixdarstellung der $\hat{\sigma}_j$ durch die Paulimatrizen gegeben ist. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_n$, wobei $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)$ durch den Polar- bzw. Azimutwinkel φ bzw. ϑ festgelegt ist. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.

3 **"Kohärente" Zustände** $|\alpha\rangle$ sind Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$, d.h., $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, wobei $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $|n\rangle$ die stationären Zustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators sind.

a) Benutzen Sie die Basis der Zustände $|n\rangle$, um eine Darstellung der Eigenzustände $|\alpha\rangle$ herzuleiten. Stellen Sie dazu eine Rekursionsformel für die Koeffizienten C_n in der Reihenentwicklung

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\ |n\rangle$$

auf. Sie erkennen das Bildungsgesetz für C_n wenn Sie die ersten Glieder $C_1, \ldots, C_3$ in Abhängigkeit von C_0 aufschreiben.

b) Welche Werte für α sind zulässig? Normieren Sie $|\alpha\rangle$, d.h., berechnen Sie C_0.

c) Wie entwickelt sich $|\alpha\rangle$ zeitlich (für den freien Oszillator)?

d) * Freiwillige Zusatzaufgabe: Warum kann $|\alpha\rangle$ kein Eigenzustand zu $a^\dagger$ sein?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Do., dem 10.7.03 —