# Übungsblatt X Theoretische Physik D

Marco Schreck, Matrikelnummer: 1096937
Gruppe 5, Suresh Pereira

## 0.1 Übungsblatt X

### 0.1.1 Aufgabe 1

**a.) und b.)**

Die Eigenzustände des harmonischen Oszillators berechnen sich nach der Vorlesung folgendermaßen:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

Damit haben wir eine Basis:

$$B = \left\{|0\rangle;\ \hat{a}^\dagger|0\rangle;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle;\ \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^3|0\rangle;\ \ldots\right\}$$

In dieser Basis lassen sich die Eigenzustände sehr einfach darstellen:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},\ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},\ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},\ \ldots$$

Nun benötigen wir noch folgende Relationen der Auf- und Absteigeoperatoren:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Des weiteren sind die Eigenzustände orthonormiert:

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

Hiermit gilt nun:

$$\langle n|\hat{a}^\dagger|k\rangle = \langle n|\sqrt{k+1}|k+1\rangle = \sqrt{k+1}\langle n|k+1\rangle = \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1}$$

$$\langle n|\hat{a}|k\rangle = \langle n|\sqrt{k}|k-1\rangle = \sqrt{k}\langle n|k-1\rangle = \sqrt{k}\delta_{n,k-1}$$

Damit können wir nun zuerst $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ als Matrix dargestellt werden.

$$\hat{a}^\dagger = \langle n|\hat{a}^\dagger|k\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \langle n|\hat{a}|k\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Damit können nun sowohl $\hat{x}$ als auch $\hat{p}$ berechnet werden:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Analog gilt:

$$\hat{p} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Quadrate der Matrizen:

$$\hat{p}^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ \hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Damit kann nun schließlich der Hamilton-Operator bestimmt werden:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\cdot\frac{1}{2m}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{m}{2}\omega^2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{4}\omega\left[-\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 9 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar}{4}\omega\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 9 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 18 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}$$

Die Energie-Eigenwerte sind nun gerade die Diagonal-Elemente der Matrix, also:

$$\boxed{E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

**c.)**

$$\langle x \rangle = \langle n|\hat{x}|n\rangle = 0$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{(2m+1)\hbar}{2\tilde{m}\omega}}$$

$$\langle p \rangle = 0$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p \rangle} = \sqrt{\frac{\tilde{m}\omega\hbar(2m+1)}{2}}$$

### 0.1.2 Aufgabe 2

Die Pauli-Matrizen lauten:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der angegebenen Matrix:

$$\det(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A}) = \det\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & n_x\\ n_x & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}n_y\\ \mathrm{i}n_y & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}n_z & 0\\ 0 & -n_z\end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix}\lambda - n_z & -(n_x-\mathrm{i}n_y)\\ -(n_x+\mathrm{i}n_y) & \lambda+n_z\end{pmatrix}\right] =$$

$$= (\lambda-n_z)(\lambda+n_z) - (n_x-\mathrm{i}n_y)(n_x+\mathrm{i}n_y) = \lambda^2 - n_z^2 - n_y^2 - n_x^2 = \lambda^2 - \|\vec{n}\|^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Nun gilt:

$\|\vec{n}\|^2 = \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Also haben wir:

$\lambda^2 = 1$

$\boxed{\lambda = \pm 1}$

Zur Berechnung der Eigenwerte müssen die Lösungen folgender Gleichungssysteme bestimmt werden:

- $\lambda = 1$:

  $$\begin{pmatrix}1-n_z & -(n_x-\mathrm{i}ny_y)\\ -(n_x+\mathrm{i}n_y) & 1+n_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix}(1-n_z)(n_x+\mathrm{i}n_y) & -(n_x-\mathrm{i}n_y)(n_x+\mathrm{i}n_y)\\ -(1-n_z)(n_x+\mathrm{i}n_y) & (1+n_z)(1-n_z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix}1-n_z & -(n_x-\mathrm{i}n_y)\\ 0 & 1-n_z^2-n_y^2-n_x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  Hierbei erhalten wir nun:

  $x_2 = u$

  $x_1 = \dfrac{n_x-\mathrm{i}n_y}{1-n_z}u$

  Damit folgt als Eigenraum:

  $$\boxed{\mathrm{ER}(1) = L\left\{\begin{pmatrix}\frac{n_x-\mathrm{i}n_y}{1-n_z}\\ 1\end{pmatrix}\right\}}$$

- $\lambda = -1$:

  $$\begin{pmatrix}-1-n_z & -(n_x-\mathrm{i}n_y)\\ -(n_x+\mathrm{i}n_y) & -1+n_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix}-(1+n_z)(n_x+\mathrm{i}n_y) & -(n_x-\mathrm{i}n_y)(n_x+\mathrm{i}n_y)\\ (n_x+\mathrm{i}n_y)(1+n_z) & -(1+n_z)(1+n_z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix}-1-n_z & -(n_x-\mathrm{i}n_y)\\ 0 & 1-n_z^2-n_y^2-n_x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

  Auch hier gilt nun:

  $x_2 = u$

  $x_1 = -\dfrac{n_x+\mathrm{i}n_y}{1+n_z}u$

  Wir erhalten wir folgenden Eigenraum:

  $$\boxed{\mathrm{ER}(-1) = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{n_x+\mathrm{i}n_y}{1+n_z}\\ 1\end{pmatrix}\right\}}$$

  Sind diese Eigenvektoren orthogonal? Wir prüfen dies durch direkte Rechung:

  $$\begin{pmatrix}\frac{n_x-\mathrm{i}n_y}{1-n_z}\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{n_x+\mathrm{i}n_y}{1+n_z}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{-n_x^2-n_y^2}{1-n_z^2}+1 = \frac{-n_x^2-n_y^2+1-n_x^2}{1-n_z^2} = \frac{1-n_x^2-n_y^2-n_z^2}{1-n_z^2} = \frac{1-1}{1-n_z^2} = \boxed{0}$$

  Also sind die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ orthogonal zueinander!

### 0.1.3 Aufgabe 3

**a.)**

Es gilt folgende Eigenwertgleichung:

$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Diese Eigenwertgleichung lösen wir mit dem angegebenen Ansatz:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

Durch Einsetzen resultiert:

$$\hat{a}\left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle\right] \stackrel{!}{=} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{a}|n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

Wir machen auf der linken Seite eine Indexverschiebung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{n+1}\sqrt{n+1}| - \alpha C_n\right]|n\rangle = 0$$

Dies ist nur genau dann der Fall, wenn der Ausdruck innerhalb der Summe gleich Null ist:

$$C_{n+1}\sqrt{n+1} - \alpha C_n \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus erhalten wir dann eine Rekursionsbezeihung für die $C_n$:

$$C_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha C_n$$

$$\boxed{C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} C_n}$$

Um ein Bildungsgesetz zu erkennen, bestimmen wir die ersten vier Konstante $C_n$:

$$C_1 = \alpha C_0$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \alpha C_0 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} C_0$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} C_0 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} C_0$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\alpha^3}{\sqrt{6}} C_0 = \frac{\alpha^4}{\sqrt{24}} C_0$$

$$\vdots$$

Wir vermuten folgendes Bildungsgesetz:

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

Dies können wir durch Vollständige Induktion beweisen:

- Induktionsanfang:

  Für $n = 1$ gilt:

  $$C_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1!}} C_0 = \alpha C_0$$

  Dies stimmt!

- Induktionsvoraussetzung:

  $$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

- Induktionsbehauptung:

  $$C_n \mapsto C_{n+1}$$

- Induktionsschluß:

  $$C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} C_0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen!

**b.)**

$\alpha$ kann komplexe Werte annehmen. Die Normierungskonstante beträgt:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n C_n^\star \langle n| \sum_m C_m |m\rangle = \sum_{n,m} C_n^\star C_m \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} = \sum_n C_n^\star C_n \langle n|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0\right]^\star \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |C_0|^2 =$$
$$= |C_0|^2 \exp\left(|\alpha|^2\right)$$

Daraus ergibt sich also:

$$\boxed{C_0 = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)}$$

**c.)**

Wir wenden den Zeitentwicklungsoperator auf die $|a\rangle$ an:

$$\hat{T}_a|a\rangle = C_0 \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar} t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}}{\hbar} t\right) |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar} t\right) |n\rangle =$$
$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\mathrm{i}\left[n + \frac{1}{2}\right] \omega \cdot t\right) |n\rangle}$$