Universität Karlsruhe SS 2005
Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. J.H. Kühn, Dr. A. Kulesza
http://www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Erstes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 19.04.2005 10:00 Uhr

NAME:	**GRUPPE:**

Aufgabe 1 Wellen-Teilchen-Dualität (2 Punkte)

Die Einstein-de-Broglie-Beziehungen ordnen der Energie E eines Teilchens eine Frequenz ν und dem Impuls p eine Wellenlänge λ zu ($E = h\nu;\ \lambda = h/p$).
Berechnen Sie die Wellenlänge und Frequenz:

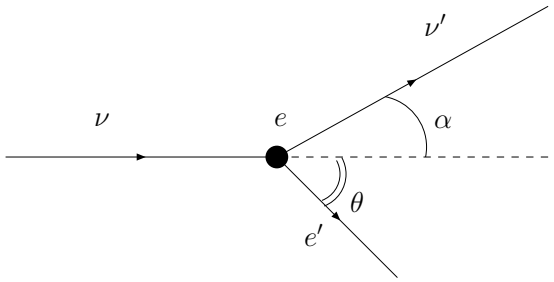
(a) eines Photons mit der Energie 1 keV.

(b) einer Kugel mit $m = 10$ g und Geschwindigkeit 10 m/s.

(c) von ("thermischen") Neutronen mit der kinetischen Energie von 0.05 eV im nichtrelativistichen Fall ($m_n = 940 \times 10^6$ eV/c^2).

Aufgabe 2 Compton-Effekt (3 Punkte)

Ein Photon der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß laufe das gestreute Photon mit der Frequenz ν' weiter, das Elektron e' mit der Geschwindigkeit v. Der Streuwinkel zwischen ν und ν' sei α. (Nichtrelativistiche Näherung!)



(a) Wie lautet der Energieerhaltungssatz? Wie lautet der Impulserhaltungssatz?

(b) Eliminieren Sie v aus dem Impulserhaltungssatz mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes.

(c) Die Frequenz ν' unterscheide sich nur wenig von ν, $\nu' = \nu - \delta\nu$. Zeigen Sie, dass in erster Ordnung gilt: $\nu^2 + \nu'^2 = 2\nu\nu'$ und zeigen Sie damit die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos\alpha)\ .$$

($h/(mc) = 2.4 \times 10^{-10}$ cm heißt die Compton-Wellenlänge des Elektrons.)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Gegeben sei eine (reell- oder komplexwertige) auf der gesamten $x-$Achse definierte Funktion $f(x)$. Dieser Funktion ordnen wir mittels des Integrals

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x)$$

eine neue, auf $-\infty < k < \infty$ definierte Funktion $\tilde{f}(k)$ zu, die wir als *Fouriertransformierte* von $f(x)$ bezeichnen. Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} \qquad\qquad (\alpha > 0)$$

und vergleichen Sie $\tilde{f}(k)$ mit $f(x)$. (Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-(x+iy)^2] = \sqrt{\pi}$.)

(b) Als Beispiel für die Ausbreitung einer Materiewelle betrachten wir (in einer Dimension) das *Gaußsche Wellenpaket*

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}\ ; \qquad\qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

mit (C und a reell, positiv)

$$g(k) = C \exp\left[-\frac{1}{2a^2}(k - k_0)^2\right]\ .$$

(i) Legen Sie die Konstante C so fest, dass $g(k)$ " auf Eins normiert" ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 dk = 1\ .$$

(ii) Bestimmen Sie $\Psi(x,t)$. Eine nützliche Formel für komplexe α, β, γ mit $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ (die unmittelbar aus obigem Hinweis folgt) lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-\alpha k^2 - i\beta k - \gamma\right] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left[\frac{-\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right]\ .$$

Das Ergebnis läßt sich auf die folgende Form bringen:

$$\Psi(x,t) = \frac{Ca}{\sqrt{1 + i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left[-\frac{a^2\,(x - v_0 t)^2}{2\left(1 + i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)}\right] \exp\left[i\,(k_0 x - \omega_0 t)\right]$$

mit $v_0 = \hbar k_0/m$ and $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$.