Theoretische Physik D - Quantenmechanik SS 2005

Übungsblatt 1 - Lösung

Dieses Dokument ist mit LaTeX erstellt worden. Es besitzt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit und darf daher auch nicht als Referenzquelle verwendet werden.

Aufgabe 1 (Wellen-Teilchen-Dualität)

Gegeben $E = h \cdot \nu$ und $\lambda = \frac{h}{p}$.

a) Photon mit der Energie $1keV$

$$\begin{aligned} E &= 1000eV \\ \nu &= \frac{E}{h} = 2,42 \cdot 10^{17} s^{-1} \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} = 1,24 \cdot 10^{-9} = 1,24nm \end{aligned}$$

b) Kugel mit $m = 10g$ und $v = 10m/s$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E}{h} = \frac{mv^2}{2h} = 7,55 \cdot 10^{32} s^{-1} \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 6,63 \cdot 10^{-33} m \end{aligned}$$

c) Thermische Neutronen

Gegeben: $E_{Kin} = 0,05eV$ und $m_n = 940 \cdot 10^6 eV/c^2$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E}{h} = 1,21 \cdot 10^{13} s^{-1} \\ E &= \frac{p^2}{2m} \\ \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1,28 \cdot 10^{10} m \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Compton-Effekt)

a) Energie- und Impulserhaltung

Energieerhaltungssatz:

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$$

Impulserhaltungssatz:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 \underbrace{(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\alpha)}_{Kosinussatz}$$

b) Eliminierung von v

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2h}{m}(\nu - \nu')} \\ \Rightarrow 2hm(\nu - \nu') &= \left(\frac{h}{c}\right)^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\alpha) \end{aligned}$$

c) Compton-Formel

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu - \delta\nu \\ \nu^2 + \nu'^2 &= \nu^2 + (\nu - \delta\nu)^2 = 2\nu^2 - 2\nu\delta\nu + O^2(\delta\nu) \\ \nu^2 + \nu'^2 &= 2\nu^2 - 2\nu\delta\nu = 2\nu(\nu - \delta\nu) = 2\nu\nu' \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\alpha) &= \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} \\ \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\alpha) &= \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \\ \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha) &= \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} \\ \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha) &= \lambda' - \lambda = \Delta\lambda \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-ikx} f(x) \quad mit \quad f(x) = e^{-\alpha x^2} \\
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-(\alpha x^2 + ikx)} \\
\left(\sqrt{\alpha} x + i \frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 &= \underline{\underline{(\alpha x^2 + ikx)}} - \frac{k^2}{4\alpha} \\
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\left(\sqrt{\alpha}x + i\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \\
\text{Substitution:} \qquad u &= \sqrt{\alpha} x \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\alpha} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\alpha}} \\
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \; \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\left(u + i\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Hinweises aus dem Aufgabenblatt erhält man schließlich:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

b) Gaußsches Wellenpaket

(i) Festlegung des Konstante C

$$\begin{aligned}
1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k \; |g(k)|^2 \\
|g(k)|^2 &= C^2 e^{-\frac{1}{a^2}(k-k_0)^2} \\
\text{Substitution:} \qquad u &= \frac{k - k_0}{a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{a} \qquad \mathrm{d}k = \mathrm{d}u \; a \\
1 &= aC^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \; e^{-u^2} \\
1 &= aC^2 \sqrt{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}
\end{aligned}$$

(ii) Bestimmung von $\Psi(x,t)$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, g(k) e^{i(kx-\omega(k)t} \quad ; \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad ; \quad g(k) = Ce^{-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2}$$

Sortieren des Exponenten nach Potenzen von k:

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{\delta} \\
\delta &= -\underbrace{\left(\frac{1}{2a^2} + i\frac{\hbar t}{2m}\right)}_{\alpha} k^2 - i\underbrace{\left(i\frac{k_0}{a^2} - x\right)}_{\beta} k - \underbrace{\frac{k_0^2}{2a^2}}_{\gamma} \\
\Psi(x,t) &= \frac{C}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left[\frac{-\beta^2}{4\alpha} - \gamma\right] \\
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{\frac{k_0^2}{a^4} - x^2 + i\frac{2k_0 x}{a^2}}{\frac{2}{a^2}\left(1 - i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)} - \frac{k_0^2}{2a^2}\right] \\
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{-a^2x^2 + \frac{k_0^2}{a^2} + i2k_0 x - \frac{k_0^2}{a^2}\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)}{2\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{-a^2x^2 + i2\left(k_0 x - \frac{k_0^2\hbar t}{2m}\right)}{2\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)}\right] \\
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{-a^2x^2 + i2\left(k_0 x - \frac{k_0^2\hbar t}{2m}\right) \cdot \left[\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right) - i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right]}{2\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)}\right] \\
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{-a^2\left(x^2 - \frac{2\hbar k_0 t}{m}x + \frac{\hbar^2 k_0^2 t^2}{m^2}\right)}{2\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)} + i\left(k_0 x - \frac{\hbar k_0^2 t}{2m}\right)\right] \\
\Psi(x,t) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}}} \exp\left[\frac{-a^2(x-v_0 t)^2}{2\left(1+i\frac{\hbar a^2 t}{m}\right)} + i(k_0 x - \omega_0 t)\right]
\end{aligned}$$