

Zweites Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 26.04.2005 10:00 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(3 Punkte)

- (a) Bilden Sie für das normierte Gaußsche Wellenpaket Ψ aus Aufgabe 3b (Übungsblatt 1) die sogenannten Mittelwerte (oder Erwartungswerte) von Ort und Impuls:

$$\langle x \rangle = \int dx |\Psi(x, t)|^2 x \quad \langle p \rangle = \int dx \Psi^*(x, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t)$$

- (b) Als Maß für die Breite des Gaußschen Wellenpackets definiert man Δx durch

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

und entsprechend Δp . Berechnen Sie Δx und Δp als Funktion der Zeit. Wie verhalten sich $\langle p \rangle$ und Δp als Funktion der Zeit? (Begründung.)

- (c) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\Psi(x, t)|^2$.
- (d) Innerhalb welcher Zeitspanne T verdoppelt sich die bei $t = 0$ vorhandene Breite $(\Delta x)_{t=0}$ in den folgenden Fällen:
- (i) Elektron, $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-8}$ cm, d.h. anfängliche Lokalisierung innerhalb einer dem Atomdurchmesser entsprechenden Strecke ($m_e = 0.9 \times 10^{-27}$ g).
 - (ii) Elektron, $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-1}$ cm, vielleicht typisch für die Blendenöffnungen bei Versuchen im Labor.
 - (iii) Makroskopische Masse $m = 1$ g, $(\Delta x)_{t=0} \approx 1$ cm.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Betrachtet werden soll die Reflexion eines von links einlaufenden Teilchens der Energie $E > 0$ ($k^2 = 2mE/\hbar^2$) an einer unendlich hohen Wand, vor der sich eine Potentialmulde der Breite l befindet, d.h. das Potential hat die Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -l \\ -V_0 & -l < x < 0 \\ +\infty & x \geq 0 \end{cases}$$

- (i) Beginnen Sie mit dem Ansatz: $\Psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$ und $\Psi_{II} = B \sin \kappa x$, wobei $\kappa^2 = 2m(V_0 + E)/\hbar^2$, und begründen Sie diese Form. Zeigen Sie, dass das Teilchen totalreflektiert wird, dass also für den Reflexionskoeffizienten R der rücklaufenden Welle gilt: $R = 1$. Bringen Sie den Ausdruck für die rücklaufende Welle in die Form $\Psi_{I,rueck} = -e^{2i\delta} e^{-ikx}$, wobei $\delta = \arccot\left(\frac{\kappa}{k} \cot(\kappa l)\right) - \kappa l$ ist. (Hinweis: Zwei nützliche Identitäten sind: $\arctan(x) = \pi/2 - \arccot(x)$ sowie $\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = e^{-2i\alpha}$ mit $\alpha = \arctan(\lambda)$.)
- (ii) Zeigen Sie, dass für $\kappa = n\pi/l$ der Term $e^{2i(\delta+\kappa l)}$ reell wird.
- (iii) Zeigen Sie, dass Sie im Grenzfall $V_0 \rightarrow 0$ für die Wellenfunktion die erwartete Sinusfunktion erhalten.

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Betrachten Sie nun Bindungszustände ($-V_0 < E < 0$) zum Potential der Aufgabe 2. Benutzen Sie folgende Abkürzungen:

$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \quad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \quad \text{und} \quad \kappa = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingungen bei $x = -l$ zur Gleichung $\tan(\kappa l) = -\kappa/\rho$ führen.
- (ii) Diese Gleichung lässt sich auf die Form $\tan y = -y/\sqrt{(k_0 l)^2 - y^2}$ bringen, mit $y = \kappa l$. Untersuchen Sie graphisch die Anzahl der gebundenen Zustände für festes l in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie insbesondere, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt.