Theoretische Physik D - Quantenmechanik SS 2005

Übungsblatt 3 - Lösung

Dieses Dokument ist mit LaTeX erstellt worden. Es besitzt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit und darf daher auch nicht als Referenzquelle verwendet werden.

© by Viktor Mauch

Aufgabe 1

(i) Anschlussbedingungen für $\Psi(x)$ und $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
V(x) &= -V_0\delta(x) \qquad \text{mit: } V_0 > 0 \\
E\Psi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) - V_0\delta(x)\Psi(x) \\
\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{d}x\ E\Psi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{d}x\ \Psi''(x) - V_0\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{d}x\ \delta(x)\Psi(x)
\end{aligned}
$$

für $\epsilon \to 0$ folgt:

$$
0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi'(\epsilon) - \Psi'(-\epsilon)) - V_0\Psi(0)
$$

Daraus ergeben sich folgende Anschlussbedingungen (für $\epsilon \to 0$):

$$
\Psi(\epsilon) = \Psi(-\epsilon) \tag{1}
$$

$$
\Psi'(\epsilon) - \Psi'(-\epsilon) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\Psi(0) \tag{2}
$$

(ii) Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$
\Psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > 0 \end{cases}
$$

aus (1) folgt: $\qquad C = 1 + B$

$$\text{aus (2) folgt:} \qquad ik(C-(1-B)) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\underbrace{(1+B)}_{=C=\Psi(0)}$$

Berechnung von B:

$$\begin{aligned}
\text{mit } B = C-1: \qquad & 2ikB = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}(1+B) \\
B\left(ik + \frac{mV_0}{\hbar^2}\right) &= -\frac{mV_0}{\hbar^2} \\
B &= \frac{-\frac{mV_0}{\hbar^2}}{ik + \frac{mV_0}{\hbar^2}} = \frac{1}{1 - i\frac{k\hbar^2}{mV_0}}
\end{aligned}$$

Berechnung von C:

$$\begin{aligned}
\text{mit } C = B+1: \qquad & ik(2C-2) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}C \\
C\left(2ik + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) &= 2ik \\
C &= \frac{ik}{ik + \frac{mV_0}{\hbar^2}} = \frac{1}{1 - i\frac{mV_0}{\hbar^2 k}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad R = |B|^2 = \frac{1}{1 + \frac{k^2\hbar^4}{m^2V_0^2}} \qquad T = |C|^2 = \frac{1}{1 + \frac{m^2V_0^2}{\hbar^2 k^2}}$$

$$R + T = \frac{\left(1 + \frac{m^2V_0^2}{\hbar^2k^2}\right) + \left(1 + \frac{k^2\hbar^4}{m^2V_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{k^2\hbar^4}{m^2V_0^2}\right)\cdot\left(1 + \frac{m^2V_0^2}{\hbar^2k^2}\right)} = \frac{2 + \frac{m^2V_0^2}{\hbar^4k^2} + \frac{k^2\hbar^4}{m^2V_0^2}}{1 + \frac{m^2V_0^2}{\hbar^4k^2} + \frac{k^2\hbar^4}{m^2V_0^2} + 1} = \underline{\underline{1}}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
V(x) &= -V_0\delta(x) \qquad \text{mit: } V_0 > 0 \\
\Psi(x) &= \begin{cases} Ae^{\kappa x} & x < 0 \\ Be^{-\kappa x} & x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Es gelten die selben Anschlussbedingungen wie in Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
\text{aus (1) folgt:} \qquad & A = B \\
\text{aus (2) folgt:} \qquad & -\kappa B - \kappa A = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \kappa = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

Normierung von $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}
1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x |\Psi(x)|^2 \\
1 &= \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x |Ae^{\kappa x}|^2 + \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}x |Ae^{-\kappa x}|^2 \\
1 &= \left[A^2 \frac{1}{2\kappa} e^{2\kappa x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[A^2 \frac{1}{-2\kappa} e^{2\kappa x}\right]_{0}^{\infty} \\
1 &= A^2 \frac{1}{2\kappa} - A^2 \frac{1}{-2\kappa} \\
\Rightarrow \qquad A &= \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}
\end{aligned}$$

Da wir hier nur eine Bedingung für den Betrag von A erhalten, besitzt die allgemeine Lösung noch eine Freiheit, die komplexe Phase $e^{i\Phi}$. Daraus folgt für die Lösung der Wellenfunktion:

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar} \begin{cases} e^{\frac{mV_0}{\hbar^2}} e^{i\Phi} & x < 0 \\ e^{-\frac{mV_0}{\hbar^2}} e^{i\Phi} & x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 \delta(x+d) & x < 0 \qquad V_0 > 0 \\ +\infty & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{\rho x} & x \leq -d \\ B_1 e^{-\rho x} + B_2 e^{\rho x} & x \geq -d \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Es gelten folgende Anschlussbedingungen:

$$\Psi_{II}(0) = 0 \tag{3}$$

$$\Psi_I(-d) = \Psi_{II}(-d) \tag{4}$$

$$\Psi'_{II}(-d) - \Psi'_I(-d) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \Psi_{I,II}(-d) \tag{5}$$

Die Bedingung (5) folgt aus der Integration in den Grenzen $(-d-\epsilon)$ bis $(-d+\epsilon)$ analog zur Aufgabe 1(i).

aus (3) folgt:	$B_1 = B_2 (= B)$
aus (4) folgt:	$Ae^{-\rho d} = B(e^{\rho d} - e^{-\rho d})$
aus (5) folgt:	$B(-\rho e^{\rho d} - \rho e^{-\rho d}) - \rho A e^{-\rho d} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-\rho d}$

Division der letzten Gleichung durch $-Ae^{-\rho d}$ bzw. $-B(e^{\rho d} - e^{-\rho d})$ führt schließlich zu:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \rho\left(1 + \frac{e^{\rho d} + e^{-\rho d}}{e^{\rho d} - e^{-\rho d}}\right) &= \frac{2mV_0}{\hbar^2} \\ \rho(1 + \coth \rho d) &= \frac{2mV_0}{\hbar^2} \\ \coth \rho d &= \frac{2mV_0}{\hbar^2 \rho} - 1 \end{aligned}$$

Der $\coth \rho d$ nähert sich für $d \to \infty$ 1 an. Für eine Lösung der Gleichung muss daher $mV_0/\hbar^2\rho > 1$ erfüllt sein. Für den Abstand d gilt:

$$d = \frac{1}{\rho} \operatorname{arcoth}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \rho} - 1\right)$$