Viertes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 10.05.2005 10:00 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(2 Punkte)

- (i) Ebene Wellen (mit Energie $E = k^2 \hbar^2 / (2m)$, $E < V_0$) erfahren bei Reflexion an einer Potentialstufe der Höhe V_0 einen Phasensprung um 2ϕ . Berechnen Sie ϕ als Funktion von m , V_0 und k .
- (ii) Ein Wellenpaket mit Verteilung $g(k)$ (Maximum bei k_0 mit $k_0^2 \hbar^2 / (2m) < V_0$) wird an derselben Stufe reflektiert. Berechnen Sie mittels der Methode der stationären Phasen, um welche Zeitspanne δt das reflektierte Wellenpaket später eintrifft als das entsprechende klassische Teilchen. (Beachten Sie: Die Phasenverschiebung $2\phi(k)$ führt zu einer Verspätung des quantenmechanischen Wellenpaketes gegenüber der klassischen Lösung.)

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Die trigonometrischen Funktionen $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$ mit $n=1,2,3,\dots$ bilden auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ein orthonormales Funktionensystem. Dieses System ist vollständig, so dass für alle (quadratintegrierbaren) Funktionen $f(x)$ die zugehörige Fourier-Reihe im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert:

$$f_N(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right) \rightarrow f(x) \quad (N \rightarrow \infty).$$

Die Fourierkoeffizienten berechnen sich dabei durch

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx), \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx).$$

- (i) Zeigen Sie, dass für gerade Funktionen (bzw. ungerade Funktionen) die Koeffizienten b_n (bzw. a_n) verschwinden.
- (ii) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (iii) Führen Sie außerdem die Fourieranalyse durch für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Der Zustandsraum für ein physikalisches System sei durch die Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ aufgespannt. Die Vektoren $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$ seien gegeben durch:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle + \frac{-i}{\sqrt{2}}|3\rangle \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|3\rangle \end{aligned}$$

- (i) Normieren Sie $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$. Suchen Sie einen Vektor $|\Psi_3\rangle$ derart, dass $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet.
- (ii) Berechnen Sie die Matrizen, die in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ die Projektoren auf $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ bzw. $|\Psi_3\rangle$ darstellen und zeigen Sie, dass diese Matrizen hermitesch sind. Überprüfen Sie die Vollständigkeit $\sum_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = 1$.

Aufgabe 4

(3 Punkte)

In einem dreidimensionalen Vektorraum sei $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis, bezüglich derer der Operator L_y die folgende Matrixdarstellung besitze:

$$L_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Ist L_y hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren bezüglich obiger Basis.
- (ii) Berechnen Sie den Projektor auf die Eigenvektoren. Prüfen Sie die Orthogonalität und die Vollständigkeit.