Fünftes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 17.05.2005 10:00 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Ein dreidimensionaler Vektorraum sei durch eine Orthonormalbasis aufgespannt, bezüglich derer zwei Operatoren H und B wie folgt definiert sind (ω, b reell):

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Zeigen Sie, dass H und B hermitesch sind. Die Eigenwerte beider Operatoren sind folglich reell. Wie lauten Sie?
- (ii) Zeigen Sie, dass der Kommutator $[H, B]$ verschwindet. Es existiert daher ein Satz gemeinsamer Eigenvektoren zu H und B . Geben Sie eine Orthonormalbasis an, die aus derartigen Eigenvektoren gebildet ist.
- (iii) Wegen der Vertauschbarkeit von H und B muss es eine Basis geben, bezüglich derer beide Matrizen Diagonalgestalt haben (mit den jeweiligen Eigenwerten in der Diagonalen). Finden Sie eine Übergangsmatrix U für solch einen Basiswechsel, d. h. gesucht ist eine unitäre Matrix U , so dass $B' = UBU^\dagger$ und $H' = UHU^\dagger$ beide diagonal sind.
- (iv) Welche der Mengen $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$ von Operatoren bilden einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen?

bitte wenden !

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Betrachten wir wieder ein Potential der Form $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.Für den gebundenen Zustand ($E < 0$) erhielten wir (auf Blatt 3, Aufgabe 2):

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\rho}e^{-\rho|x|} \quad \text{mit} \quad \rho = (mV_0)/\hbar^2.$$

Für Steuzustände ($E > 0$) mit von links einlaufenden Wellen ergab sich (auf Blatt 3, Aufgabe 1):

$$\Phi_p^l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{cases} e^{ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa}e^{-ipx/\hbar} & , \quad x \leq 0 \\ \frac{i\kappa}{1+i\kappa}e^{ipx/\hbar} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

mit $p = \sqrt{2mE}$ und $\kappa = p/(\rho\hbar)$.(i) Um ein vollständiges Orthonormalsystem zu konstruieren, benötigen wir noch Streuzustände mit von rechts einlaufenden Wellen $\Phi_p^r(x)$. Bestimmen Sie $\Phi_p^r(x)$.

(ii) Das System ist orthonormiert, also müssen folgende Relationen gelten:

$$\begin{array}{ll} 1.) \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1 & 2.) \langle \Psi_0 | \Phi_p^l \rangle = 0 \\ 3.) \langle \Psi_0 | \Phi_p^r \rangle = 0 & 4.) \langle \Phi_p^l | \Phi_{p'}^l \rangle = \delta(p - p') \\ 5.) \langle \Phi_p^r | \Phi_{p'}^r \rangle = \delta(p - p') & 6.) \langle \Phi_p^l | \Phi_{p'}^r \rangle = 0 \end{array}$$

mit $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_0^*(x) \Psi_0(x)$, usw.

Verifizieren Sie die Relation 1.), 2.), 4.) und 6.).

Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^{\infty} dx e^{ikx} = \mathcal{P} \frac{i}{k} + \pi\delta(k)$.(iii) Zeigen Sie für den Fall $x > 0$ und $x' > 0$, dass das System vollständig ist, also dass

$$\Psi_0(x)\Psi_0(x') + \int_0^{\infty} dp \Phi_p^{l*}(x)\Phi_p^l(x') + \int_0^{\infty} dp \Phi_p^{r*}(x)\Phi_p^r(x') = \delta(x - x')$$

gilt.

Hinweis: Die Integrale $\int_0^{\infty} dx \frac{\cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$ und $\int_0^{\infty} dx \frac{x \sin(bx)}{1+x^2} = \text{sign}(b) \frac{\pi}{2}e^{-|b|}$ sind nützlich.