Sechstes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 24.05.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir untersuchen ein Teilchen in einem Potentialtopf der Breite $d = 2a$ mit unendlich hohen Wänden, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq -a \\ 0 & -a < x < a \\ +\infty & x \geq a \end{cases} .$$

- (i) Berechnen Sie die (normierten) Energie-Eigenfunktionen Ψ_n und die zugehörigen Energie-Eigenwerte E_n . Welche Zustände sind gerade, welche ungerade?
- (ii) Als Ausgangspunkt unserer folgenden Überlegungen befinde sich das System im ersten angeregten Zustand. Welchen Wert würde also eine Energiemessung ergeben? Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ führen wir nun eine Ortsmessung durch und stellen dabei fest, dass sich das Teilchen **NICHT** in der rechten Topfhälfte ($0 < x < a$) befindet. Wie sieht die (normierte) Wellenfunktion unmittelbar nach der Ortsmessung aus?
- (iii) Im Anschluss an die Ortsmessung führen wir unverzüglich eine Energiemessung durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_n , als Messresultat den Energiewert E_n zu erhalten? Würde diese Wahrscheinlichkeit anders lauten, wenn wir die Energiemessung erst zu einem deutlich späteren Zeitpunkt $t_0 > 0$ vorgenommen hätten?
- (iv) Gelingt es Ihnen, aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit $\sum_n P_n = 1$ die folgende Formel herzuleiten:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{3}{2})^2 (k - \frac{1}{2})^2} = \frac{\pi^2}{4} .$$

Aufgabe 2

(3 Punkte)

Betrachten Sie nun einen Zustand $|\Psi\rangle$, der als Überlagerung von $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ definiert ist, und zwar zur Zeit $t = 0$ als

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle .$$

- (i) Berechnen Sie nun die Zeitentwicklung von $|\Psi(t)\rangle$ und daraus die Zeitentwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit und der Stromdichte.
- (ii) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung.

Hinweis: Um die Rechnung zu vereinfachen können Sie $\Psi_1(x) = \langle x|E_1\rangle$ und $\Psi_2(x) = \langle x|E_2\rangle$ als reell annehmen.

Aufgabe 3

(1,5 Punkte)

$|\phi_n\rangle$ seien Eigenzustände des hermiteschen Operators H . Nehmen Sie an, dass die $|\phi_n\rangle$ eine Orthonormalbasis aufspannen. Der Operator $U(m, n)$ sei definiert durch:

$$U(m, n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

- (i) Berechnen Sie den zu $U(m, n)$ adjungierten Operator $U^\dagger(m, n)$.
- (ii) Berechnen Sie den Kommutator $[H, U(m, n)]$.
- (iii) Beweisen Sie die Relation $U(m, n)U^\dagger(p, q) = \delta_{nq}U(m, p)$.
- (iv) Berechnen Sie die Spur des Operators $U(m, n)$,

$$Spur[U(m, n)] := \sum_i \langle\phi_i|U(m, n)|\phi_i\rangle .$$

- (v) Sei A ein Operator mit den Matrixelementen $A_{mn} = \langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$. Beweisen Sie:

$$A = \sum_{m,n} A_{mn}U(m, n) .$$

- (vi) Zeigen Sie, dass $A_{pq} = Spur[AU^\dagger(p, q)]$.
-

Aufgabe 4

(1,5 Punkte)

Ein dreidimensionaler Raum werde durch die Basis $\{|u_1\rangle |u_2\rangle |u_3\rangle\}$ aufgespannt. Es seien die zwei folgenden Operatoren definiert

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Sind H und B hermitesch?

(ii) Zeigen Sie, dass H und B vertauschen. Bestimmen Sie drei Vektoren, die sowohl zu H als auch zu B Eigenvektoren sind. Was sind ihre Eigenwerte? Ist $\{H, B\}$ ein vollständiger Satz von Observablen?

(iii) Es sei

$$B' = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und H wie oben definiert. Ist $\{H, B'\}$ ein vollständiger Satz von Observablen?