Siebtes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 07.06.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Gegeben sei der (eindimensionale) Hamiltonoperator $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$. Verwenden Sie, dass für einen stationären Zustand $\frac{d}{dt}\langle XP_x \rangle = 0$ gilt, und leiten Sie daraus den Virialsatz

$$\frac{i}{\hbar}\langle X[P_x, V(X)] \rangle = 2\langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle$$

her. Verwenden Sie dazu $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial t} A \rangle$ mit $A = XP_x$. Was erhalten Sie für $V(x) = \lambda x^n$ und speziell für $n = 2$?

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Für den linearen harmonischen Oszillator mit den Energie-Eigenzuständen $|\Psi_n\rangle$ sind mit Hilfe der Operatoren a und $a^\dagger$ die folgenden Größen zu berechnen:

(i) die Matrixelemente $\langle \psi_m | X | \psi_n \rangle$ und $\langle \psi_m | P | \psi_n \rangle$,

(ii) das Produkt $(\Delta x)(\Delta p)$ mit

$$(\Delta x)^2 = \langle \psi_n | X^2 | \psi_n \rangle - (\langle \psi_n | X | \psi_n \rangle)^2$$

und analog für $(\Delta p)^2$,

(iii) die Erwartungswerte der potentiellen und kinetischen Energie für die Zustände $|\psi_n\rangle$.
Vergleichen Sie das Resultat mit dem von Aufgabe 1.

Aufgabe 3

(2 Punkte)

Die Hermitepolynome sind durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right) H_n(x) = 0$$

definiert. Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm} .$$

- (i) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b von

$$H_4(x) = 2^4 x^4 + bx^2 + a,$$

indem Sie fordern, dass $H_4(x)$ im obigen Sinne orthogonal zu $H_0(x) = 1$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$ ist.

Hinweis: Die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \exp(-x^2 \alpha)$ folgen aus $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2 \alpha)$, indem Sie n mal nach α ableiten.

- (ii) Drücken Sie x^4 durch Hermitepolynome aus.
-

Aufgabe 4

(3 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der Masse m und Frequenz ω . Sein Zustand sei zur Zeit $t = 0$ durch

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$$

gegeben, wobei die $|\phi_n\rangle$ stationäre Zustände zu den Energien $(n + 1/2)\hbar\omega$ sind.

- (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass eine Energiemessung zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ einen Wert größer $2\hbar\omega$ liefert? Geben Sie im Falle $P = 0$ die nichtverschwindenden Koeffizienten c_n an.
- (ii) Für den Rest der Aufgabe seien nur c_0 und c_1 ungleich Null angenommen (auch für Teil (iii) und (iv)). Geben Sie Normierungsbedingung für $|\Psi(0)\rangle$ und den Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle$ als Funktion von c_0 und c_1 an. Berechnen Sie $|c_0|^2$ und $|c_1|^2$ unter der Annahme, dass $\langle H \rangle = \hbar\omega$ ist.
- (iii) Im Folgenden sei $c_0 > 0$ und als reell angenommen. Dadurch wird der Phasenfaktor des normierten Zustands $|\Psi(0)\rangle$ festgelegt. Des weiteren sei $\langle H \rangle = \hbar\omega$ und $\langle x \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie dann den Wert für θ_1 in $c_1 = |c_1| \exp(i\theta_1)$.
- (iv) Berechnen Sie mit dem so festgelegten $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und bestimmen Sie den Wert für θ_1 zur Zeit t . Was ist der Erwartungswert von $\langle x \rangle(t)$ zur Zeit t ?