Achtes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 14.06.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Die Wellenfunktion $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle$ für ein Teilchen der Masse m sei zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durch ein Gaußsches Wellenpaket gegeben:

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \beta^2 (x - a)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x \right)$$

(i) (kräftefreier Fall)

Wie lautet die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu einer beliebigen Zeit t , wenn sich das Teilchen kräftefrei bewegt? (Erinnern Sie sich an Ihre Rechnung auf Blatt 1, Aufgabe 3, und Blatt 2, Aufgabe 1!) Bringen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ in die Form

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x} \exp \left[-\frac{(x - \langle X \rangle)^2}{2(\Delta x)^2} \right].$$

Wie lautet der Erwartungswert $\langle X \rangle$ und die Breite des Wellenpakets Δx ?

(ii) (Oszillator-Potential)

Das Teilchen befinde sich jetzt im Oszillator-Potential $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ mit der zusätzlichen Anfangsbedingung $p_0 = 0$, ($\beta = \sqrt{(m\omega/\hbar)}$). Berechnen Sie $\psi(x, t)$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ kann in die gleiche Form wie bei (i) gebracht werden. Wie lauten nun $\langle X \rangle$ und Δx ?

Hinweis: Schieben Sie in $\langle x | \Psi(t) \rangle = \langle x | e^{-iHt/\hbar} | \Psi(0) \rangle$ einen vollständigen Satz von Energie-Eigenfunktionen $|\phi_n\rangle$ ein. Zur Berechnung können Sie die folgenden Relationen gebrauchen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi-\alpha)^2} H_n(\xi) = \sqrt{\pi} (2\alpha)^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} \lambda^n = \exp(-\lambda^2 + 2\lambda\xi).$$

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Es seien σ_i ($i = 1, 2, 3$) die Pauli-Matrizen und I die 2×2 Einheitsmatrix

- (i) Verifizieren Sie für den Spezialfall $i = 1, j = 2$, dass gilt:

$$\begin{aligned}\{\sigma_i, \sigma_j\} &\equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I, \\ [\sigma_i, \sigma_j] &\equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k.\end{aligned}$$

- (ii) Mit Hilfe von (i) soll gezeigt werden, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ (a_i, b_i komplexe Zahlen) die Identität

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} I + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

gilt.

- (iii) Eine beliebige 2×2 Matrix M sei definiert durch

$$M = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad a_0, a_i \in \mathbb{C}.$$

Wie können a_0 und a_i durch die Spuren $Sp(M)$ und $Sp(\sigma_i M)$ ausgedrückt werden?

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Ein Teilchen mit Spin $1/2$ und dem magnetischen Moment $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ befinde sich in einem Magnetfeld $\vec{B}_0$ mit $B_x = -\omega_x/\gamma, B_y = -\omega_y/\gamma, B_z = -\omega_z/\gamma$.

- (i) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0)$ (mit $|\Psi(t)\rangle = U(t, 0)|\Psi(0)\rangle$) durch

$$U(t, 0) = e^{-iMt}$$

gegeben ist, wobei (σ_i sind die Pauli-Matrizen)

$$M = \frac{1}{\hbar}[\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z].$$

und $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ der S_z Eigenvektoren. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von M in dieser Basis. Zeigen Sie, dass

$$M^2 = \omega_0^2/4, \quad \omega_0 = -\gamma|\vec{B}_0|.$$

Bringen Sie den Operator U in die Form

$$U(t, 0) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right).$$

- (ii) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{++}(t)$, mit der man den Zustand $|+\rangle$ zu einer beliebigen Zeit findet, durch

$$\mathcal{P}_{++}(t) = |\langle +|U(t, 0)|+\rangle|^2$$

gegeben ist und leiten Sie die Beziehung her

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right).$$