Theoretische Physik D - Quantenmechanik I

Übungsblatt 8 - Lösung

SS 2005

Dieses Dokument ist ein Mitschrieb aus den Tutorien. Es besitzt daher keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit und darf somit nicht als Referenzquelle genutzt werden.

Aufgabe 1

(i) (kräftefreier Fall)

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \hat{p}|k\rangle = p|k\rangle, \qquad \langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$$

Hängt der Hamilton Operator nicht explizit von der Zeit ab, erhält man

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$$

Entwicklung nach Energie-Eigenzuständen:

$$|\psi(0)\rangle = \left(\int dk\ |k\rangle\langle k|\right)|\psi\rangle = \int dk\ |k\rangle \underbrace{\langle k|\psi(0)\rangle}_{g(k)} = \int dk\ g(k)|k\rangle$$

Dabei ist $g(k)$ der Entwicklungskoeffizient und $|k\rangle$ Eigenzustand des Hamiltonoperators.

$$\begin{aligned} g(k) &= \langle k|\psi(0)\rangle = \int dx\ \langle k|x\rangle\langle x|\psi(0)\rangle = \int dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}\psi(x,0) \\ &= \cdots = \left(\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\beta^2}} e^{-i(k-k_0)a} \end{aligned}$$

mit $\quad k_0 = \frac{p_0}{\hbar}, \quad v_0 = \frac{\hbar k}{m}, \quad \omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\int dk\ g(k)|k\rangle \\ &= \int dk\ g(k)e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|k\rangle = \int dk\ g(k)e^{-\frac{i}{\hbar}t\frac{p^2}{2m}}|k\rangle \\ &= \int dk\ g(k)e^{-\frac{i}{\hbar}t\frac{\hbar^2k^2}{2m}}|k\rangle = \int dk\ g(k)e^{-i\omega t}|k\rangle \end{aligned}$$

mit $\quad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \langle x|\psi(t)\rangle = \int dk\ g(k)e^{-ik\omega} \underbrace{\langle x|k\rangle}_{=e^{ikx}/\sqrt{2\pi}} \\ &= \cdots = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i\hbar t\beta^2}{m}}} e^{i(k_0x-\omega_0t)} e^{-\frac{\beta^2(x-a-v_0t)^2}{2(1+\frac{i\hbar t\beta^2}{m})}} \end{aligned}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2 \beta^4}{m^2}}} e^{-\frac{\beta^2 (x-a-v_0 t)^2}{(1+\frac{\hbar^2 t^2 \beta^4}{m^2})}}$$

$\Rightarrow \quad \langle x \rangle = a + v_0 t$ und $\quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2 \beta^4}{m^2}}$

(ii) (Oszillator-Potential)

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \qquad \hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \qquad H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle, \qquad E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$$

Hängt der Hamilton Operator nicht explizit von der Zeit ab, erhält man

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$$

Entwicklung nach Energie-Eigenfunktionen:

$$|\psi(0)\rangle = (\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|)\ |\psi(0)\rangle = \sum_n \langle\phi_n|\psi(0)\rangle\ |\phi_n\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$$

$$\begin{aligned} c_n &= \langle\phi_n|\psi(0)\rangle \\ &= \langle\phi_n| \left(\int dx'\ |x'\rangle\langle x'|\right) |\psi(0)\rangle \\ &= \int dx'\ \phi_n(x')\psi(x',0) \end{aligned}$$

mit $\quad \phi_n(x) = \langle\phi_n|x\rangle = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} H_n(\beta x) \quad$ und $\quad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c_n &= \int dx'\ \phi_n(x')\psi(x',0) \\ &= \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \int dx'\ e^{\frac{-\beta^2 x'^2}{2}} H_n(\beta x') e^{-\frac{\beta^2 (x'-a)^2}{2}} \\ &\overset{y'=\beta x'}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \int dy'\ H_n(y') e^{-(y'-\frac{\beta a}{2})^2} e^{-\frac{\beta^2 a^2}{4}} \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\beta^2 a^2}{4}} (\beta a)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \langle x|\psi(t)\rangle \\ &= \langle x|e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle \\ &= \langle x|e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\sum_n c_n|\phi_n\rangle \\ &= \sum_n c_n\ \langle x|e^{-i\frac{\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}{\hbar}t}|\phi_n\rangle \\ &= \sum_n c_n e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}\langle x|\phi_n\rangle \\ &= \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}(2x^2+a)} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{(\beta a)^n}{2^n n!} H_n(\beta x) e^{-i\omega n t} \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\beta^2}{4}(2x^2+a)} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \exp\left[-\frac{\beta^2 a^2}{4} e^{-2i\omega t} + \beta^2 ax\ e^{-i\omega t}\right] \\ = \ldots &= \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\beta^2}{a}(x-a\cos(\omega t))^2} e^{-i(\frac{\omega t}{2} - \frac{\beta^2 a^2}{4}\sin(2\omega t) + \beta^2 ax\sin(\omega t))} \end{aligned}$$

(verwende: $\cos(2\omega t) = 2\cos^2(\omega t) - 1$)

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2(x - a\cos(\omega t))^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}, \quad \langle x \rangle = a\cos(\omega t)$$

Aufgabe 2

Paulimatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) $i = 1,\ j = 2$

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 0 = 2\delta_{12} I \quad \checkmark$$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{123}\sigma_3 \qquad \checkmark$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(\sigma \cdot \vec{a})(\sigma \cdot \vec{b}) &= (\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3)(\sigma_1 b_1 + \sigma_2 b_2 + \sigma_3 b_3) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_i a_i \ \sigma_j b_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\sigma_i \sigma_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \frac{1}{2}(2\delta_{ij} I + 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} I + \sum_{k=1}^{3} (i\sigma_k (\sum_{ij=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j)) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b}\ I + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(iii)

$$M = a_0 I + a_1\sigma_1 + a_1\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

$$\mathrm{Sp}(\sigma_1) = \mathrm{Sp}(\sigma_2) = \mathrm{Sp}(\sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}(M) = 2a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{\mathrm{Sp}(M)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \cdot M &= a_0\sigma_1 + a_1 I + a_2\sigma_1\sigma_2 + a_3\sigma_1\sigma_3 \\
&= a_0\sigma_1 + a_1 I + i a_2\sigma_3 - i a_3\sigma_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}(\sigma_i \cdot M) = 2a_i \quad \Rightarrow \quad a_i = \frac{\mathrm{Sp}(\sigma_i M)}{2}$$

Aufgabe 3

(i) Der Zeitentwicklungsoperator ist gegeben durch:

$$U(t,t_0) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)}$$

Dabei ist die Energie einer Magnetisierung gegeben durch:

$$H = -\vec{M}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad U(t,0) = e^{-i\frac{-\vec{M}\cdot\vec{B}}{\hbar}t}$$

mit $\vec{M}\cdot\vec{B} = \gamma \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x/\gamma \\ \omega_y/\gamma \\ \omega_z/\gamma \end{pmatrix} = -\omega_x S_x - \omega_y S_y - \omega_z S_z$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{\hbar}(-\vec{M}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{\hbar}(\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z) \quad \checkmark$$

aus $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ folgt die Matrixdarstellung von M:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}\left[\omega_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \omega_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

weiterhin:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_0^2}{4}\, I \end{aligned}$$

mit $\quad \omega_0^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$

vergleiche: $-\gamma|\vec{B}_0| = -\gamma \left|\begin{pmatrix} -\omega_x/\gamma \\ -\omega_y/\gamma \\ -\omega_z/\gamma \end{pmatrix}\right| = -\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = -\gamma|\vec{B}_0|$$

$$
\begin{aligned}
U(t,0) &= e^{-iMt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iMt)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-iMt)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-iMt)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-i)^2)^n}{(2n)!}(M^2)^n t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-i)^2)^n \cdot (-i)}{(2n+1)!}(M^2)^n \cdot M\ t^{2n+1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^{2n} t^{2n}\right) \cdot I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^{2n+1} t^{2n+1}\right) \cdot M \left(-i\frac{2}{\omega_0}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)\ I - \frac{2i}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)\ M
\end{aligned}
$$

(ii) kohärente Oszillation

gegeben: $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$

$$
\begin{aligned}
P_{++}(t) &= |\langle +|\Psi(t)\rangle|^2 \\
&= |\langle +|U(t,0)|\Psi(0)\rangle|^2 \\
&= |\langle +|U(t,0)|+\rangle|^2 \qquad \checkmark \\
&= \left|\langle +|\cos\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)\ I - \frac{2i}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)|+\rangle\right|^2 \\
&= \left|\langle +|\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{\omega_0}\begin{pmatrix} \omega_z \\ \omega_x + i\omega_y \end{pmatrix}\sin\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)\right|^2 \\
&= \left|\cos\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) - \frac{i\omega_z}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right)\right|^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) + \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) \\
&= 1 - \sin^2\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0\ t}{2}\right) \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$