Neuntes Übungsblatt zur Theorie D (QM I)

Abgabe: 21.06.2005 10:45 Uhr

NAME:

GRUPPE:

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Ein geladener linearer harmonischer Oszillator (Ladung q , Masse m , Kreisfrequenz ω) befindet sich in einem elektrischen Feld $\vec{E}(t)$ parallel zur Oszillatorachse.

(i) Klassischer Fall

- (a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = qE(t)/m$ durch Einführen einer komplexen Größe $A = (\omega x + i\dot{x})/\sqrt{2}$ auf die Form

$$\dot{A}(t) = -i\omega A(t) + iL(t), \quad L(t) = \frac{qE(t)}{\sqrt{2}m}$$

gebracht werden kann. Geben Sie die allgemeine Lösung für $x(t)$ als Realteil von A an. (Anmerkung: Beachten Sie den engen Zusammenhang zwischen der Definition von A und der des Vernichtungsoperators.)

- (b) Berechnen Sie die erzwungenen Schwingungen unter dem Einfluß des Feldes ($\omega' \neq \omega$)

$$E_x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ E_0 \cos \omega' t & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

wenn der Oszillator zur Zeit $t = 0$ im Gleichgewicht ist ($x = 0$, $\dot{x} = 0$). Wie groß ist die zugeführte Energie zur Zeit $t > T$?

(ii) Quantenmechanischer Fall

Der Hamiltonoperator hat die Form

$$H(t) = H_0 + W(t), \quad W(t) = -qE(t)x.$$

- (a) Geben Sie $H(t)$ als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$, a an und berechnen Sie die Kommutatoren $[a, H(t)]$ und $[a^\dagger, H(t)]$.
- (b) $\alpha(t)$ sei der Erwartungswert des Vernichtungsoperators a bezüglich eines (normierten) Zustandes $|\psi(t)\rangle$:

$$\alpha(t) = \langle \psi(t) | a | \psi(t) \rangle .$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Schrödingergleichung für $|\psi(t)\rangle$, dass $\alpha(t)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t) , \quad \lambda(t) = \frac{qE(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}} .$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für beliebiges $\lambda(t)$ (verwenden Sie hierbei das Resultat von Aufgabe (i)b) und geben Sie die Erwartungswerte $\langle X \rangle(t)$ und $\langle P \rangle(t)$ an.

- (c) $|\phi(t)\rangle$ sei definiert durch

$$|\phi(t)\rangle = [a - \alpha(t)]|\psi(t)\rangle .$$

Mit Hilfe von (i) und (ii) soll gezeigt werden, dass die Zeitentwicklung von $|\phi(t)\rangle$ durch die Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle = (H(t) + \hbar\omega) |\phi(t)\rangle$$

beschreiben wird, ganz in Analogie zur Schrödingergleichung. Wie ändert sich der Betrag von $|\phi(t)\rangle$ mit der Zeit?

- (d) Es sei $|\psi(0)\rangle$ ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators mit Eigenwert $\alpha(0)$ (quasi-klassischer Zustand). Zeigen Sie ohne größere Rechnung unter Verwendung von (c), dass für $t > 0$ $|\psi(t)\rangle$ ebenfalls ein Eigenzustand von a ist und berechnen Sie den entsprechenden Eigenwert $\alpha(t)$.
- (e) (Kann ohne (c) und (d) gelöst werden.) Zur Zeit $t = 0$ sei der Oszillator im Grundzustand $|\phi_0\rangle$. Berechnen Sie für $E(t)$ aus (i) die Erwartungswerte $\langle X \rangle(t)$, $\langle P \rangle(t)$ und $\langle H \rangle(t)$ (bezüglich kohärenter Zustände) und vergleichen Sie mit dem klassischen Fall.
- (f) Welche möglichen Werte liefert in diesem Fall (d.h. für $|\phi_0\rangle$ bei $t = 0$) eine Energiemessung zur Zeit $t > T$ und mit welcher Wahrscheinlichkeit P_n ? Verwenden Sie die Tatsache, dass $|\phi_0\rangle$ zur Zeit $t = 0$ ein quasi-klassischer Zustand ist und die Resultate von (d). Verwenden Sie ausserdem bei der Bestimmung von $|\langle \phi_0 | \psi(T) \rangle|^2$, dass die Summe $\sum_n P_n = 1$.

Aufgabe 2

1 Punkt

Geben Sie eine Darstellung der Funktionen $r^l Y_l^m(\theta, \phi)$ für $l = 0, 1, 2$ und $m = -l, \dots, l$ in den kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

an.

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(r)$ sei

$$\psi(\vec{x}) = (x + y + 3z)f(r).$$

- (i) Ist ψ eine Eigenfunktion von L^2 ? Falls ja, welches ist der entsprechende Wert für l ? Falls nein, welches sind die möglichen l -Werte bei einer Messung von L^2 ?
- (ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, das Teilchen in Zuständen zu verschiedenen m_l zu finden.
- (iii) Angenommen $\psi(\vec{x})$ sei Eigenfunktion des Hamiltonoperators zum Eigenwert E . Wie kann das Potential $V(r)$ gefunden werden? Drücken Sie $V(r)$ durch $f(r)$ und seine Ableitungen aus.